

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
«30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

Прикладной функциональный анализ

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.

Код дисциплины **Б1.В.ДВ.09.01 «Прикладной функциональный анализ»**

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.09.01 «Прикладной функциональный анализ» относится к части ООП направления подготовки <i>01.03.02 «Прикладная математика и информатика»</i> , формируемой участниками образовательных отношений.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-13. Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	ПК-13.1. Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике	Знать: основные понятия анализа: 1. Нулевая мера. Условие «почти всюду». 2. Определение интеграла Лебега, его свойства. Пространство L_2 . 3. Понятия двойного и повторного интегралов Лебега. Теорема Фубини. 4. Измеримые множества и функции. 5. Определение МП и метрической группы, свойства расстояния. 6. Предел. Смысл предела в некоторых конкретных МП. 7. Плотные множества. Примеры всюду плотных множеств функций. 8. Сепарабельное МП. Сепарабельность подмножества. 9. Сходящиеся в себе последовательности. Полное МП.	Собеседование

		<p>10. Непрерывные операции. Линищ- непрерывные операции.</p> <p>11. Принцип сжимающих отображений в полном МП.</p> <p>12. Линейное пространство. Линейно независимые системы.</p> <p>13. Предел в ЛНП. Непрерывность нормы и арифметических действий.</p> <p>14. Полная система элементов. Примеры полных систем функций.</p> <p>15. Линейный ограниченный оператор.</p> <p>16. Норма оператора, формулы для нормы. Примеры оценки нормы.</p> <p>17. Принцип сжимающих отображений для линейного уравнения в В-пространстве.</p> <p>18. Оценки норм композиции и итерации.</p> <p>19. Ряд линейных ограниченных операторов. Ряд итераций.</p> <p>20. Условия существования и ограниченности обратного оператора.</p> <p>21. Критерий линейной независимости системы элементов.</p> <p>22. Гильбертово пространство (Н- пространство).</p> <p>23. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых элементов.</p> <p>24. Теорема о разложении элемента в ряд Фурье в сепарабельном Н- пространстве.</p> <p>25. Ортогональное дополнение.</p> <p>26. Собственные векторы и числа (значения) самосопряженного оператора.</p> <p>27. Собственное подпространство самосопряженного компактного оператора.</p> <p>Производные по Фреше и Гато. Свойства сильной производной.</p>	
	<p>ПК-13.3. Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет</p>	<p>Уметь:</p> <p>-использовать на практике знания, полученные при изучении дисциплины «Прикладной функциональный анализ 1»:</p> <p>1. Определять обладает ли рассматриваемая характеристика пары элементов пространства свойствами</p>	<p>Собеседование</p> <p>Практические задания</p>

	<i>применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</i>	<i>метрики.</i> <i>2. Проверять применимость и применять к приближенному решению принцип сжимающих отображений.</i> <i>3. Проверять ортогональность заданной системы элементов и, в случае ее полноты, раскладывать по данной системе элемент в ряд Фурье.</i> <i>4. Решать линейные интегральные уравнения.</i>	
	ПК-13.4. Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований	Владеть: - аппаратом прикладного функционального анализа: - навыками использования математических методов обработки информации.	Собеседование Практические задания

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	2 ЗЕТ
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	33
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- занятия лабораторного типа	0
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	39
Промежуточная аттестация – экзамен/зачет	зачет

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе		
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них	ятельная работа	обучающихся

		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1 Основные сведения из ФА Краткий обзор основных понятий математического и функционального анализа, линейной алгебры. Примеры приближенного решения стандартных уравнений.	10	2	2		4	6
Тема 2 Метод сжимающих отображений. Липшиц-непрерывность. Теорема о модифицированном методе сжимающих отображений.	10	2	2		4	6
Тема 3 Применение метода сжимающих отображений. Применение метода сжимающих отображений к решению различных задач.	12	3	3		6	6
Тема 4 Аппроксимация уравнений в подпространствах. Теорема о методе аппроксимации линейного уравнения в подпространствах, условия сходимости, оценка погрешности.	13	3	3		6	7
Тема 5 Схема аппроксимации для интегрального уравнения. Применение схема аппроксимации уравнения в подпространствах к решению интегрального уравнения.	13	3	3		6	7
Тема 6 Метод Фурье. Применение частичных сумм ряда Фурье к аппроксимации линейного интегрального уравнения. Условия сходимости метода, вид уравнений для поиска коэффициентов.	13	3	3		6	7
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация - зачет						
Итого	72	16	16		33	39

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Прикладной функциональный анализ» включает подготовку к зачету.

Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам, указанным в списке литературы, подготовке ответов на вопросы самоконтроля. Самостоятельная работа может происходить как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс (Прикладной функциональный анализ, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=829>), созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Контрольные вопросы

Вопрос	Код компетенции (согласно РПД)
1. Краткий обзор основных понятий математического и функционального анализа, линейной алгебры. Примеры приближенного решения стандартных уравнений.	ПК-13
2 Метод сжимающих отображений Липшиц-непрерывность. Теорема о модифицированном методе сжимающих отображений.	ПК-13
3. Применение метода сжимающих отображений к решению различных задач	ПК-13
4. Линейные операторы. Понятие линейного оператора. Ограниченный оператор. Непрерывность. Норма оператора. Примеры интегральных операторов и оценки их нормы.	ПК-13
5. Аппроксимация уравнений в подпространствах. Теорема о методе аппроксимации линейного уравнения в подпространствах, условия сходимости, оценка погрешности.	ПК-13
6.Схема аппроксимации для интегрального уравнения. Применение схема аппроксимации уравнения в подпространствах к решению интегрального уравнения.	ПК-13
7. Гильбертово пространство. Понятие скалярного произведения. Неравенство Коши-	ПК-13

Буняковского. Матрица Грама. Примеры базисов. Понятие сепарабельного гильбертова пространства.	
8. Метод Фурье. Применение частичных сумм ряда Фурье к аппроксимации линейного интегрального уравнения. Условия сходимости метода, вид уравнений для поиска коэффициентов.	ПК-13
9. Метод Ритца. Метод наименьших квадратов. Задача поиска минимума функционала. Теорема о сходимости метода, оценка погрешности. Квадратный корень из оператора. Метод Ритца. Пример применения метода Ритца.	ПК-13
10. Метод наискорейшего спуска. Самосопряженные операторы. Построение процесса приближений в методе наискорейшего спуска.	ПК-13
11. Необходимые условия оптимального управления. Необходимое условие экстремума дифференцируемого функционала. Сильное дифференцирование композиции операций. Необходимые условия оптимального управления в гладкой задаче на открытом множестве.	ПК-13
12. Достаточные условия оптимального управления. Полунепрерывные функционалы. Достаточные условия минимума функционала и минимизирующей последовательности. Достаточные условия оптимального управления.	ПК-13

5.2.3. Типовые задания для оценки сформированности компетенции ПК-13

1. Привести сведения из линейного и нелинейного функционального анализа в метрических, нормированных, унитарных и частично упорядоченных пространствах, указать взаимосвязь основных понятий.
2. Сформулировать модифицированный метод сжимающих отображений в полном метрическом пространстве и в шаре. Привести примеры применения метода к интегральным уравнениям.
3. Сформулировать метод аппроксимации линейного уравнения в подпространствах линейного нормированного пространства (ЛНП). Показать сходимость метода в серии подпространств, указать оценку погрешности.
4. Сформулировать понятие корректности линейной математической модели в ЛНП, понятие Липшицевой устойчивости решения линейного уравнения относительно возмущения обеих частей уравнения
5. Построить полиномы Лежандра и алгебраический ряд Фурье.
6. Привести построение базиса в гильбертовом пространстве интегрируемых с квадратом по Лебегу функций двух переменных. Сформулировать метод Фурье (метод моментов) приближенного решения линейных операторных и интегральных уравнений.
7. Сформулировать метод наименьших квадратов в унитарном пространстве. Показать сходимость метода, оценку погрешности.
8. Сформулировать понятие квадратного корня из самосопряженного положительно определенного оператора.
9. Описать применение метода Ритца в гильбертовом пространстве и указать оценку его сходимости.

10. Привести модифицированный метод наискорейшего спуска в гильбертовом пространстве и указать его сходимость, оценку погрешности.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература

1. Треногин В.А. Функциональный анализ. // М.: Физматлит, 2002, с. 488. (42 экз.)
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. / М.: Физматлит, 2006, – 572 с. (232 экз.)
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: учебное пособие. – М. Высшая школа, 1982. – 271 с. (86 экз.)

б) дополнительная литература:

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М. Наука, 1965. – 52с. (27 экз.)
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. // М. Наука, 1982. – 752 с. (26 экз.)

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: к.ф.-м.н., доцент кафедры ДУМиЧА Кротов Н.В.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Заведующий кафедрой ДУМиЧА: д.ф.-м.н. Калинин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.