

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
(протокол от 14.12.2021 г. №4)

Рабочая программа дисциплины

Математическая логика

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.01 Математика

Направленность образовательной программы
Общий профиль

Форма обучения
Очная

Нижегород
2022 год

1. Место и цели дисциплины в структуре ООП

Дисциплина Б1.О.35 «Математическая логика» относится к обязательной части ООП бакалавриата по направлению подготовки «Математика». Преподаётся в первом и седьмом семестрах.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.0.35, «Математическая логика», относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.01 Математика

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знать методы поиска, критического анализа и синтеза информации, основы системного подхода для решения поставленных задач.	Знать основные понятия и важнейшие факты из комбинаторики, теории графов, пропозициональной логики и предикатной логики.	Собеседование, тесты
	УК-1.2. Уметь осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.	Уметь выполнять преобразования между различными формами представления дискретных объектов.	Задачи, тесты
	УК-1.3. Владеть основами критического анализа и синтеза информации, системного подхода для решения поставленных задач.	Владеть навыками построения доказательств и проверки корректности рассуждений.	Задачи
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в	ОПК-1.1. Знать методы решения задач из области математических и естественных наук	Знать тождества алгебры множеств, способы подсчёта количества комбинаторных объектов, свойства различных типов графов. Знать синтаксис и семантику логики первого порядка, теоремы о корректности и полноте, теоремы о разрешимости	Собеседование, тесты

профессионально й деятельности		отдельных теорий и неразрешимости логики первого порядка, определение и факты о машине Тьюринга.	
	ОПК-1.2. Уметь применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь решать типовые комбинаторные задачи, простейшие задачи теории множеств и анализа графов. Уметь выражать отношения формулами первого порядка, определять общезначимость формул, приводить формулы к каноническим видам, строить формальные выводы формул.	контрольные работы, задачи, тесты
	ОПК-1.3. Иметь навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности в области математических и естественных наук.	Владеть навыками перевода утверждений с естественного языка на язык формальной логики. Владеть навыками доказательства общезначимости и логического следования формул. Владеть методом элиминации кванторов для определения истинности формул.	контрольные работы, задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Всего
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	180
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	32
- занятия лабораторного типа	0
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	78
Промежуточная аттестация – экзамен	36 (экзамен)

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1. Элементы логического языка первого порядка	13	4	4		8	5
Тема 2. Модели формул логического языка первого порядка	13	4	4		8	5
Тема 3. Логический вывод	13	4	4		8	5
Тема 4. Канонические формы предложений в логике первого порядка	13	4	4		8	5
Тема 5. Приближенное выражение свойств структур в логике первого порядка	13	4	4		8	5
Тема 6. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий	13	4	4		8	5
Тема 7. Алгоритмическая разрешимость теорий. Метод элиминации кванторов	14	4	4		8	6
Тема 8. Изучение моделей вычислений на примере машины Тьюринга	14	4	4		8	6
Текущий контроль (КСРИФ)	2					
Промежуточная аттестация — экзамен	36					
Итого 7 семестр	144	32	32		64	42
Итого за 1-й и 7-й семестры	288	48	64		112	100

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

Практическая подготовка предусматривает выполнение проекта, решение прикладной задачи кейса.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа включает выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением, изучение литературы и проработку теоретического материала лекционных занятий.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Гордон Е.И. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009. Рег. №10.98.06.

<http://www.unn.ru/books/resources.html>

2. Малышев Д.С., Мокеев Д.Б. Элементы неклассических логик и моделей вычислений: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 33 с.

www.unn.ru/books/met_files/NL.pdf

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций					
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично
	Не зачтено		Зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»

	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения.

5.2.4. Вопросы к экзамену

Вопросы	Код формируемой компетенции
1. Логический язык первого порядка. Понятия универса, константы, переменной, функции, терма, предиката. Число всех k -местных предикатов и функций на n -элементном универсе. Синтаксис логического языка первого порядка: описание алфавита, построение переменных, термов и формул, примеры. Понятие подформулы, области действия квантора, связанной и свободной переменной, предложения. Примеры.	УК-1
2. Понятие интерпретации формул логического языка первого порядка. Определение истинностного значения формул, примеры. Понятие алгебраической системы (структуры) заданной сигнатуры. Основные понятия, связанные с интерпретацией: общезначимые, выполнимые и невыполнимые формулы, примеры; понятия логического следования, равносильных формул, примеры; понятие модели множества формул, примеры. Понятие изоморфизма структур, примеры и контрпримеры. Элементарно эквивалентные структуры: примеры и контрпримеры.	УК-1
3. Графический и табличный способы задания структур на конечных универсах, примеры. Формула подсчета числа всех структур на конечных универсах. Понятие числа моделей и доли выполнимости предложений логического языка первого порядка, примеры ее вычисления.	УК-1
4. Понятие исключающих кванторов, модификация правил построения формул, связанная с введением исключающих кванторов. Выражение истинностных значений формул, содержащих исключающие кванторы. Понятие Γ -формулы. Логическая равносильность любой формулы языка первого порядка некоторой Γ -формуле, примеры.	УК-1
5. Логический вывод. Формальные понятия доказательства и правила вывода, пример. Разветвляющие и неразветвляющие правила. Существование конечного числа правил вывода и математическое понятие доказательства, при помощи которых можно доказать утверждения вида $\Gamma \Rightarrow A$. Пример.	УК-1
6. Логический вывод. Определение поискового дерева, правила его расширения. Лемма о поисковых последовательностях (формулировка без доказательства). Понятие дерева доказательства. Понятие выводимости формулы A из множества гипотез Γ . Теорема о корректности дедуктики.	УК-1
7. Логический вывод. Понятие ветви поискового дерева, насыщенной относительно	УК-1

заданного множества параметров. Понятие полного поискового дерева. Лемма о существовании полного дерева.	
8. Логический вывод. Теоремы о полноте и об адекватности дедуктики. Теорема о компактности.	УК-1
9. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Предваренные нормальные формы. Алгоритм приведения любой формулы к префиксному виду, примеры.	УК-1
10. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятия сингулярной и примарной формул. Алгоритм приведения любой сингулярной формулы к булевой комбинации примарных, пример.	УК-1
11. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятие свободного вхождения атомарной части в формулу. Понятие атомарно замкнутой и антипрефиксной формул. Основные этапы алгоритма приведения атомарно замкнутой формулы к антипрефиксному виду, пример.	УК-1
12. Приближенное выражение свойств структур в логическом языке первого порядка. Понятие доли выполнимости предложений. Ее обобщение для формул, содержащих свободные переменные. Свойства нормальной доли выполнимости.	УК-1
13. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Основные свойства, связанные с экспоненциальной сходимостью.	УК-1
14. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Взаимосвязь нормальной доли выполнимости и экспоненциальной сходимости.	УК-1
15. Приближенное выражение свойств структур в логическом языке первого порядка. Доказательство закона 0-1 (теорема Глебского).	УК-1
16. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий. Аксиоматические и структурные теории, примеры (не меньше трех), их развитие. Понятие теорем и элементарных теорий.	ОПК-1
17. Свойства элементарных теорий: полнота, алгоритмическая разрешимость. Метод элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости некоторых теорий (общий алгоритм). Основной этап метода для доказательства алгоритмической разрешимости теории плотного линейного порядка без концевых точек, пример.	ОПК-1
18. Основные этапы метода элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости теории целых чисел (алгоритм Пресбургера).	ОПК-1
19. Расширение и сужение элементарных теорий. Консервативные и неконсервативные расширения теорий, примеры. Явные определения новых функциональных и предикатных символов. Установление явной определимости нелогических символов через другие для исключения из теорий избыточных символов (метод Падоа), пример. Эквивалентные и слабо эквивалентные теории.	ОПК-1
20. Модели вычислений, машина Тьюринга: представление и преобразование информации, тьюринговы программы. Алгебра тьюринговых программ (их запись при помощи аналитических выражений). Методика доказательства правильности тьюринговых программ. Пример.	ОПК-1
21. Вычислимость и разрешимость: понятия словарных функций и словарных отношений, полуразрешимые и разрешимые отношения, вычислимые функции. Примеры.	ОПК-1
22. Понятие частично-рекурсивных функций. Тезис Черча	ОПК-1
23. Понятия разрешимых отношений и вычисляемых функций. Примеры невычислимой по Тьюрингу функции и алгоритмически неразрешимого отношения.	ОПК-1
24. Измерение алгоритмической сложности задач: временная и пространственная сложность алгоритмов, расшифровка этих понятий на примере тьюринговых программ. Верхняя и нижняя оценки временной сложности.	ОПК-1
25. Классы P и NP. Примеры задач из этих классов. Полиномиальная сводимость одной задачи к другой, NP-полные и NP-трудные задачи, пример.	ОПК-1

5.2.5. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Какие из нижеприведённых последовательностей символов являются *подформулами* формулы

$$\forall x[P(x) \vee \exists y[\neg Q(y) \& R(x, f(y))]] ?$$

- 1) x
- 2) $P(x)$
- 3) $f(y)$

- 4) $Q(y) \& R(x, f(y))$
- 5) $\forall x P(x)$
- 6) $\exists y [\neg Q(y) \& R(x, f(y))]$
- 7) $\forall x \exists y [\neg Q(y) \& R(x, f(y))]$

2. Какие из нижеприведённых формул являются *предложениями*?

- 1) $P(x)$
- 2) $\exists x P(x)$
- 3) $\exists x R(x, y)$
- 4) $\forall x \exists y R(x, y)$
- 5) $\forall x [P(x) \vee Q(x)]$
- 6) $\forall x [P(x) \vee Q(y)]$
- 7) $\forall x [P(x) \vee \exists y Q(y)]$
- 8) $\forall x [P(x) \vee \exists y R(x, y)]$
- 9) $[\forall x P(x)] \vee [\exists y R(x, y)]$

3. Какие из нижеприведённых формул являются *выполнимыми*?

- 1) $\exists x P(x)$
- 2) $\exists x [P(x) \& \neg P(x)]$
- 3) $[\forall x P(x)] \& [\forall x \neg P(x)]$
- 4) $\exists x [P(x) \vee \neg P(x)]$
- 5) $[\forall x P(x)] \vee [\forall x \neg P(x)]$
- 6) $[\forall x P(x)] \& [\exists x \neg P(x)]$

5.2.6. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (7 семестр)

1. Какие из нижеприведенных утверждений верны для любых предложений A и B ?

- $\{B, \neg B\} \Rightarrow A$ (+)
- $\{A \rightarrow B, \neg B\} \Rightarrow A$
- $\{\neg A \rightarrow B, \neg B\} \Rightarrow A$ (+)
- $\{A \rightarrow \neg B, B\} \Rightarrow A$
- $\{A \rightarrow B, B\} \Rightarrow A$
- $\{A \rightarrow B, \neg B\} \Rightarrow \neg A$ (+)

2. Какие из нижеприведенных утверждений являются верными (P, Q — одноместные предикатные символы)?

- $\{\forall x P(x), \forall x Q(x)\} \Rightarrow \forall x [P(x) \& Q(x)]$
- $\{\forall x P(x), \forall x Q(x)\} \Rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)]$
- $\{\forall x P(x), \exists x Q(x)\} \Rightarrow \forall x [P(x) \& Q(x)]$
- $\{\forall x P(x), \exists x Q(x)\} \Rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)]$

5.2.7. Задачи, выносимые на контрольные и экзамен для проверки компетенции ОПК-1

Контрольные проводятся по следующим темам:

1. «Выразимость отношений»;
2. «Приведение формул логики первого порядка к каноническим формам»;
3. «Алгоритмическая разрешимость теорий. Метод элиминации кванторов».

Примеры задач

1. Найдите все термы, атомарные формулы и подформулы, содержащиеся в формуле логического языка первого порядка

$$\forall x \exists y \forall z [[P(x) \& \neg Q(y)] \vee [R(z) \& Q(x)]]$$

Определите число моделей этой формулы на n -элементном универсе и подсчитайте ее долю выполнимости, найдите ее предел при $n \rightarrow \infty$. Постройте какую-нибудь модель этой формулы на универсе из четырех элементов.

2. Для следующей формулы построить предваренную нормальную форму.

$$[\forall x P(x)] \rightarrow [\forall x Q(x)]$$

3. Приведите заданную формулу к антипрефиксному виду:

$$\forall x \exists y \forall z [[P(x) \& \neg Q(y)] \vee [R(z) \& Q(x)]]$$

Пользуясь теоремой Глебского, вычислите предел ее доли выполнимости.

4. Выясните, является ли следующее предложение теоремой теории плотного линейного порядка без конечных точек.

$$\exists z \forall y \exists x [[\neg R(z, y) \vee R(y, x)] \wedge [\neg R(z, x) \vee R(x, y)]]$$

5. Напишите программу для машины Тьюринга, которая перерабатывала бы входное слово m над алфавитом $A = \{1\}$ в выходное слово $[m/3]$ (здесь m – фиксированное, но заранее не известное натуральное число). Используя методику Флойда, докажите правильность работы написанной программы. Найдите верхние оценки ее пространственной и временной сложности.

6. Напишите программу для машины Тьюринга, которая перерабатывала бы входное слово длины m над алфавитом $A = \{0, 1\}$ в выходное слово, являющееся инверсией исходного слова (здесь m – фиксированное, но заранее не известное натуральное число). Используя методику Флойда, докажите правильность работы написанной программы. Найдите верхние оценки ее пространственной и временной сложности.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература

1. Таланов В.А. Математическая логика и модели вычислений: учебное пособие. — Н. Новгород: ННГУ, 1994. — 115 с. 52 экз.

б) Дополнительная литература

1. Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Функции алгебры логики в примерах и задачах. Н. Новгород: ННГУ, 2017.

<http://www.unn.ru/books/resources.html> рег № 1434.17.14.

2. Жильцова Л.П., Смирнова Т.Г. Основы теории графов и теории кодирования в примерах и задачах. Н. Новгород: ННГУ, 2017.

<http://www.unn.ru/books/resources.html> рег № 1437.17.06.

3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1975. — 240 с. 58 экз.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

«Дискретная математика 4 курс (математика)»

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=4492>

созданные в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

1. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. Москва, Изд. МЦНМО, 2012.
www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf
2. Гордон Е.И. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009. Рег. №10.98.06.
<http://www.unn.ru/books/resources.html>
3. Малышев Д.С., Мокеев Д.Б. Элементы неклассических логик и моделей вычислений: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 33 с.
www.unn.ru/books/met_files/NL.pdf

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ по направлению 01.03.01 «Математика».

Авторы: Ph.D., ст. преп. Макаров Е.М.

к.ф.-м.н., доц. Сорочан С.В.

Рецензент (ы)

Зав кафедрой, д.ф.м.н., проф. Золотых Н.Ю.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 01.12.2021 №2.