

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Функциональный анализ и вариационное исчисление

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

15.03.03 - Прикладная механика

---

Направленность образовательной программы

Инженерное приложение суперкомпьютерного моделирования

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.23 Функциональный анализ и вариационное исчисление относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности;	ОПК-1.1: Демонстрирует знание основ проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности ОПК-1.2: Демонстрирует умение применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности ОПК-1.3: Владеет методикой проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знать основы проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности  ОПК-1.2: Уметь применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности  ОПК-1.3: Владеть навыками и методами проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.	Задачи	Зачёт: Контрольные вопросы Задания
ОПК-6: Способен решать стандартные задачи профессиональной деятельности на	ОПК-6.1: Демонстрирует знание методов решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе	ОПК-6.1: Знать методы решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе	Задачи	Зачёт: Контрольные вопросы Задания

основе информационной и библиографической культуры с применением информационно- коммуникационных технологий;	информационной и библиографической культуры с применением информационно- коммуникационных технологий ОПК-6.2: Умеет осуществлять решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно- коммуникационных технологий ОПК-6.3: Владеет методикой решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно- коммуникационных технологий	информационной и библиографической культуры с применением информационно- коммуникационных технологий.  ОПК-6.2: Уметь решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно- коммуникационных технологий  ОПК-6.3: Владеть методикой решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно- коммуникационных технологий.		
---	--	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>2</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
самостоятельная работа	7
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Измеримые множества. Определение и основные свойства измеримых множеств.	5	2	2	4	1
Тема 2. Измеримые функции. Определение и основные свойства измеримых функций. Понятие эквивалентности функций и сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Структура измеримых функций. Интеграл Лебега. Теорема Фубини. Понятие абсолютно непрерывной функции.	11	5	5	10	1
Тема 3. Линейные пространства и операторы. Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства. Линейные ограниченные операторы. Операции над линейными операторами. Понятие сопряженного оператора. Понятие спектра и спектрального радиуса линейного ограниченного оператора. Приложение спектральной теории к решению линейных дифференциальных уравнений. Принцип сжимающих отображений. Билинейные операторы.	11	5	5	10	1
Тема 4. Нелинейные операторы. Ограниченность и непрерывность нелинейного оператора. Производная по направлению и вариация по Лагранжу. Дифференцируемость по Гато и по Фреше. Квадратичный функционал. Вторая вариация и дважды дифференцируемость по Фреше. Необходимые и достаточные условия локального минимума нелинейного функционала.	11	5	5	10	1
Тема 5. Простейшая задача вариационного исчисления и ее обобщения. Условия первого порядка. Простейшая задача: классификация экстремумов, варьирование, необходимые условия первого порядка (стационарность, уравнение Эйлера), конкретные примеры (задачи о брахистохроне и о наименьшей поверхности вращения). Принцип Гамильтона-Остроградского и его применения. Обобщения простейшей задачи: экстремальные задачи на линейных многообразиях в линейных нормированных пространствах, задачи со старшими производными, задачи с вектор-функциями, задачи с функциями нескольких переменных, задачи с подвижными границами, задачи на классе кусочно-гладких функций,	11	5	5	10	1
Тема 6. Условия второго порядка в вариационном исчислении. Условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления: необходимые условия Лежандра и Якоби слабого минимума, необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума, достаточные условия локального минимума.	11	5	5	10	1
Тема 7. Принцип Лагранжа в вариационном исчислении. Вариационные задачи с ограничениями. Изопериметрические задачи. Задачи со связями. Задача Лагранжа. Конкретные примеры: задача Дидоны, задача о цепной линии, задача Чаплыгина о самолете.	11	5	5	10	1
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	32	32	65	7

## Содержание разделов и тем дисциплины

### Тема 1.

Измеримые множества.

Определение и основные свойства измеримых множеств.

### Тема 2.

Измеримые функции.

Определение и основные свойства измеримых функций. Понятие эквивалентности функций и сходимости почти всюду. Сходимость по мере. Структура измеримых функций. Интеграл Лебега.

Теорема Фубини. Понятие абсолютно непрерывной функции.

### Тема 3.

Линейные пространства и операторы. Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства. Линейные ограниченные операторы. Операции над линейными операторами. Понятие сопряженного оператора. Понятие спектра и спектрального радиуса линейного ограниченного оператора. Приложение спектральной теории к решению линейных дифференциальных уравнений. Принцип сжимающих отображений. Билинейные операторы.

### Тема 4.

Нелинейные операторы. Ограниченность и непрерывность нелинейного оператора. Производная по направлению и вариация по Лагранжу. Дифференцируемость по Гато и по Фреше. Квадратичный функционал. Вторая вариация и дважды дифференцируемость по Фреше. Необходимые и достаточные условия локального минимума нелинейного функционала.

### Тема 5.

Простейшая задача вариационного исчисления и ее обобщения. Условия первого порядка.

Простейшая задача: классификация экстремумов, варьирование, необходимые условия первого порядка (стационарность, уравнение Эйлера), конкретные примеры (задачи о брахистохроне и о наименьшей поверхности вращения). Принцип Гамильтона-Остроградского и его применения. Обобщения простейшей задачи: экстремальные задачи на линейных многообразиях в линейных нормированных пространствах, задачи со старшими производными, задачи с вектор-функциями, задачи с функциями нескольких переменных, задачи с подвижными границами, задачи на классе кусочно-гладких функций,

### Тема 6.

Условия второго порядка в вариационном исчислении.

Условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления: необходимые условия Лежандра и Якоби слабого минимума, необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума, достаточные условия локального минимума.

### Тема 7.

Принцип Лагранжа в вариационном исчислении. Вариационные задачи с ограничениями.

Изопериметрические задачи. Задачи со связями. Задача Лагранжа. Конкретные примеры: задача Дидоны, задача о цепной линии, задача Чаплыгина о самолете.

## 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Иные учебно-методические материалы:

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Функциональный анализ и вариационное исчисление» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий и подготовку к зачету. Самостоятельная работа студентов обеспечивается доступной студентам основной и дополнительной литературой, а также доступными им интернет-ресурсами.

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Задача 1. Доказать, что множество  $X \subset \mathbb{R}^2$  измеримо по Лебегу и найти его меру:

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right\}, \text{ где } a > 0 - \text{фиксированное число.}$$

Задача 2. Доказать, что функция  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , измерима по Лебегу:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(ne^x)}{n^3 \sqrt{n}}$ .

Задача 3. Найти сопряженный оператор к оператору:

$$A[z](t) = \int_{t_1}^{t_2} z(t_1, \xi) d\xi : L_p(\Pi) \rightarrow L_p(\Pi), \quad p \in (1, \infty), \quad \Pi = [0; T_1] \times [0; T_2].$$

Задача 4. Вычислить производную Фреше от оператора:  $F[z] = \int_0^T z^3(t) dt : L_3[0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-6:

Задача 1. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2 + 2xy] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Задача 2. Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$J[y] = \int_0^1 [(y'')^2 - 48y] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Задача 3. Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$J[y] = \int_0^1 (y')^2 dx \rightarrow \min, \quad K[y] = \int_0^1 y dx = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несуществе	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	ответа			ошибок	нных ошибок		
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»



### **5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

#### **5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1**

1. Понятие измеримого множества. Примеры.
2. Свойства измеримых множеств.
3. Понятие измеримой функции. Понятие эквивалентности измеримых функций.
4. Свойства измеримых функций.
5. Понятие сходимости по мере и сходимости в смысле п.в.. Свойства сходимости по мере (теорема А.Лебега, теорема Ф.Рисса).
6. Структура измеримых функций (теорема Н.Н.Лузина и ее обращение).
7. Понятие интеграла Лебега.
8. Свойства интеграла Лебега.
9. Теорема Фубини.
10. Понятие абсолютно непрерывной функции.
11. Понятие линейного нормированного пространства. Примеры.
12. Понятие банахова пространства. Примеры.
13. Понятие линейного ограниченного оператора.
14. Операции над линейными операторами.
15. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над лебеговым пространством.
16. Неравенство Гельдера.
17. Понятие спектра и спектрального радиуса линейного ограниченного оператора. Обобщенная лемма Гронуолла.
18. Методы вычисления спектрального радиуса линейного ограниченного оператора.
19. Применение спектральной теории к доказательству существования и единственности решения линейных дифференциальных уравнений.
20. Применение спектральной теории к доказательству единственности решения полулинейных дифференциальных уравнений.

### **5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-6**

1. Принцип сжимающих отображений. Примеры применения.
2. Билинейные операторы.
3. Ограниченность и непрерывность нелинейного оператора.
4. Производная по направлению и вариация по Лагранжу.
5. Дифференцируемость по Гато и по Фреше.
6. Квадратичный функционал.
7. Вторая вариация и дважды дифференцируемость по Фреше.
8. Необходимые и достаточные условия локального минимума нелинейного функционала.
9. Простейшая задача вариационного исчисления. Классификация экстремумов. Экстремали функционала и экстремали задачи.
10. Основные леммы вариационного исчисления.
11. Необходимые условия слабого локального экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
12. Задача о брахистохроне.
13. Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.
14. Задачи вариационного исчисления с вектор-функциями. Система уравнений Эйлера.
15. Задачи вариационного исчисления с функциями нескольких переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского.
16. Принцип Гамильтона-Остроградского
17. Изопериметрические задачи: постановка, принцип Лагранжа, условия регулярности.
18. Задача Дидоны
19. Задача Лагранжа.
20. Условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления.
21. Понятие о вариационных принципах механики. Принцип Гамильтона –Остроградского. Привести один из примеров (второй закон Ньютона; гармонический осциллятор; уравнение колебаний струны).

### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.

### **5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1**

Задание 1. Вычислить спектральный радиус оператора:

$$A[z](t) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_{t_2}^{T_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 : L_p(\Pi) \rightarrow L_p(\Pi), \quad p \in (1, \infty), \quad \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2].$$

Задание 2. Найти сопряженный оператор к оператору:

$$A[z](t) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_{t_2}^{T_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 : L_p(\Pi) \rightarrow L_q(\Pi), \quad p, q \in (1, \infty), \quad \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2].$$

Задание 3. Найти производную Фреше функционала:

$$F[z](t) = \iint_{\Pi} \exp z(t_1, t_2) dt_1 dt_2 : L_{\infty}(\Pi) \rightarrow R, \quad \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2].$$

Задание 4. Доказать, что множество  $X \subset R^2$  измеримо по Лебегу и найти его меру:

$$X = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq y < \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right\}, \text{ где } a > 0 - \text{фиксированное число.}$$

Задание 5. Доказать, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R$ , измерима по Лебегу:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(ne^x)}{n^3 \sqrt{n}}$ .

Задание 6. Найти сопряженный оператор к оператору:

$$A[z](t) = \int_{t_2}^{T_2} z(t_1, \xi) d\xi : L_p(\Pi) \rightarrow L_p(\Pi), \quad p \in (1, \infty), \quad \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2].$$

Задание 7. Вычислить производную Фреше от оператора:  $F[z] = \int_0^T z^3(t) dt : L_3[0; T] \rightarrow R$ .

Задание 8. Вычислить производную Фреше от оператора:  $F[z] = \int_0^T \exp[z(t)] dt : L_{\infty}[0; T] \rightarrow R$ .

Задание 9. Вычислить производную Фреше от оператора:  $F[z] = \int_0^T \ln[z(t)] dt : L_{\infty}[0; T] \rightarrow R$ , где

$$z(t) \geq L > 1 \text{ для п.в. } t \in [0; T].$$

Задание 10. Вычислить производную Фреше от оператора:  $F[z] = \int_{\Pi} \ln[z(t)] dt : L_{\infty}(\Pi) \rightarrow R$ , где

$$z(t) \geq L > 1 \text{ для п.в. } t \in \Pi = [0; T_1] \times [0; T_2].$$

Задание 11. Вычислить спектральный радиус оператора:

$$A[z](t) = \int_{t_2}^{T_2} z(t_1, \xi) d\xi : L_p(\Pi) \rightarrow L_p(\Pi), \quad p \in (1, \infty), \quad \Pi = [0; T_1] \times [0; T_2].$$

Задание 12. Вычислить спектральный радиус оператора:

$$A[z](t) = \int_{t_1}^{T_2} z(t_1, \xi) d\xi : L_\infty(\Pi) \rightarrow L_\infty(\Pi), \Pi = [0; T_1] \times [0; T_2].$$

Задание 13. Вычислить спектральный радиус оператора:

$$A[z](t) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_{t_2}^{T_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 : L_1(\Pi) \rightarrow L_1(\Pi), \Pi = [0; T_1] \times [0; T_2].$$

Задание 14. Вычислить производную Фреше от оператора:  $F[z] = \int_0^T z^2(t) dt : L_2[0; T] \rightarrow R$ .

Задание 15. Вычислить производную Фреше от оператора:  $F[z](t) = \int_0^t z^2(s) ds : L_2[0; T] \rightarrow L_\infty[0; T]$ .

Задание 16. Вычислить производную Фреше от оператора:

$$A[z](t) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} z^4(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 : L_4(\Pi) \rightarrow L_4(\Pi), \Pi = [0; T_1] \times [0; T_2].$$

Задание 17. Доказать, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R$ , измерима по Лебегу:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ,  $x \in [0; 1]$ .

Задание 18. Доказать, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R$ , измерима по Лебегу:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x$ ,

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Задание 19. Доказать, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R$ , измерима по Лебегу:  $f(x) = \frac{1}{[x+1][x+2]}$ ,  
 $x \in (0; +\infty)$ .

Задание 20. Вычислить интеграл Лебега:  $\int_{[0; +\infty)} \frac{dx}{[x+1][x+5]}$ .

Задание 21. Дано нелинейное уравнение:  $x = \ln(1.1 + x)$ ,  $x \in [0; 1.6]$ . Можно ли решить его с помощью принципа сжимающих отображений, и если можно, то сколько понадобится итераций, чтобы найти приближенное решение с абсолютной погрешностью  $\Delta < 0.01$ ?

Задание 22. Пусть  $E = C^1[0; T]$ . Является ли функционал  $G : E \times E \rightarrow R$  билинейным и ограниченным:  $G[x, y] = \int_0^T \{2x(t)y(t) + 3x'(t)y(t)\} dt$ .

### 5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-6

Задание 1. Доказать, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R$ , измерима по Лебегу:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ne^x)}{n^3 \sqrt{n}}$ .

Задание 2. Доказать, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R$ , измерима по Лебегу:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(ne^x)}{n^3 \sqrt{n}}$ .

Задание 3. Доказать, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R$ , измерима по Лебегу:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(ne^x)}{n^5 \sqrt{n}}$ .

Задание 4. Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^1 [(y')^2] dx \rightarrow \min, \quad \int_0^1 [y] dx = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Задание 5. Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^1 [(y')^2] dx \rightarrow \min, \quad \int_0^1 [xy] dx = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Задание 6. Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^{\pi} [(y')^2] dx \rightarrow \min, \quad \int_0^{\pi} [y \sin x] dx = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

Задание 7. Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^1 [(y'')^2 - 48y] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Задание 8. Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^{\pi} [(y'')^2 + 4y^2] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = ch(\pi), \quad y'(\pi) = sh(\pi)$$

Задание 9. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^1 [y^2 (y')^2] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \sqrt{2}.$$

Задание 10. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^3 [(y')^2 - y] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 1.$$

Задание 11. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^1 [(y')^3] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Задание 11. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [e^y (y')^2] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \ln 4.$$

Задание 12. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_1^e [x(y')^2] dx \rightarrow \min, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 1.$$

Задание 13. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2 - y] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Задание 14. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Задание 15. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_1^2 [x^2 (y')^2] dx \rightarrow \min, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1.$$

Задание 16. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_1^e [x(y')^2 - y] dx \rightarrow \min, \quad y(1) = 1, \quad y(e) = 2.$$

Задание 17. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [(1+x)(y')^2] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Задание 18. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Задание 19. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^2 [-(y')^3] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = -3.$$

Задание 20. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2 - x^2 y] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три

Оценка	Критерии оценивания
	несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Колмогоров Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа. - Изд. 7-е. - М. : Физматлит, 2006. - 572 с. - (Классический университетский учебник : осн. в 2002 г. / ред. совет: В. А. Садовничий (пред.) [и др.]). - На обл. кн.: Посвящается 250-летию Московского университета. - ISBN 5-9221-0266-4 : 288.60., 50 экз.
2. Эльсгольц Лев Эрнестович. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник. - 5-е изд. - М. : Эдиториал УРСС, 2002. - 320 с. - ISBN 5-354-00135-8 : 117.00., 68 экз.

Дополнительная литература:

1. Гельфанд Израиль Моисеевич. Вариационное исчисление : учебник для ун-тов. - М. : Физматгиз, 1961. - 228 с. : черт. - 0.47., 17 экз.
2. Городецкий Василий Васильевич. Методы решения задач по функциональному анализу : [учеб. пособие для ун-тов по специальностям "Математика", "Приклад. математика"]. - Киев : Вища школа, 1991. - 477, [2] с. - 2.10., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Фонд электронных изданий ННГУ. Режим доступа: <http://www.unn.ru/books/resources.html>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки/специальности 15.03.03 - Прикладная механика.

Автор(ы): Чернов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.



Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.