

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Арзамасский филиал ННГУ - Факультет естественных и математических наук

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Математический анализ

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

44.03.01 - Педагогическое образование

Направленность образовательной программы

Математика

Форма обучения

очно-заочная

г. Арзамас

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.07.01 Математический анализ относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИУК-1.1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации, специфику системного подхода для решения поставленных задач. ИУК-1.2: Умеет приобретать новые знания на основе анализа, синтеза и других методов; осуществлять поиск информации по научным проблемам, относящимся к профессиональной области. ИУК-1.3: Владеет навыками научного поиска и практической работы с информационными источниками, адекватного использования информации, полученной из медиа и других источников для решения поставленных задач.	ИУК-1.1: Знать основные разделы математического анализа, классические факты, утверждения и методы дифференциального и интегрального исчисления ИУК-1.2: Уметь формулировать и доказывать основные результаты теории дифференциального и интегрального исчисления ИУК-1.3: Владеть навыками решения практических задач с использованием методов математического анализа	Опрос Коллоквиум Тест Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы Экзамен: Контрольные вопросы
ПКР-4: Способен осваивать и анализировать базовые научно-теоретические представления о сущности, закономерностях, принципах и особенностях явлений и процессов в предметной области	ИПКР-4.1: Знает содержание, сущность, закономерности, принципы и особенности изучаемых явлений и процессов, базовые теории в предметной области, а также роль учебного предмета/образовательной области в формировании научной картины мира; основы общетеоретических	ИПКР-4.1: Знать основы теории дифференциального и интегрального исчисления, их связь со школьным курсом математики ИПКР-4.2: Уметь решать типовые задачи по математическому анализу	Опрос Коллоквиум Контрольная работа Тест	Зачёт: Контрольные вопросы Экзамен: Контрольные вопросы

	дисциплин в объеме, необходимом для решения профессиональных задач. ИПКР-4.2: Умеет анализировать базовые научно-теоретические представления о сущности, закономерностях, принципах и особенностях изучаемых явлений и процессов в предметной области знаний. ИПКР-4.3: Владеет различными методами анализа основных категорий предметной области знаний.	ИПКР-4.3: Владеть базовыми идеями и методами математического анализа: дифференциального и интегрального исчисления		
--	---	---	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очно-заочная
Общая трудоемкость, з.е.	16
Часов по учебному плану	576
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	38
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	46
- КСР	7
самостоятельная работа	377
Промежуточная аттестация	108 Экзамен, Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 3 Ф 0	0 3 Ф 0	0 3 Ф 0	0 3 Ф 0	0 3 Ф 0
Тема 1. Вещественные числа.	14	1	1	2	12

Тема 2. Верхняя и нижние грани. Свойства.	13	1		1	12
Тема 3. Функции. Основные понятия. Свойства.	12	1		1	11
Тема 4. Предел числовой последовательности.	14	1	2	3	11
Тема 5. Предел функции.	14	1	2	3	11
Тема 6. Сравнение бесконечно малых.	13	1	1	2	11
Тема 7. Непрерывность.	13	1	1	2	11
Тема 8. Свойства непрерывных функций на отрезке. Элементарные функции и их свойства.	14	1	1	2	12
Тема 9. Дифференцируемость и производная. Правила дифференцируемости. Дифференциал. Основные теоремы о дифференцируемых функциях.	18	2	1	3	15
Тема 10. Применения дифференциального исчисления к вычислению пределов и приближенным вычислениям.	17	2	1	3	14
Тема 11. Приложения дифференциального исчисления к исследованию функций и построению их графиков.	20	2	2	4	16
Тема 12. Основные теоремы дифференциального исчисления.	16	2		2	14
Тема 13. Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование подстановкой и по частям.	18	2	1	3	15
Тема 14. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование алгебраических иррациональностей.	17	2	1	3	14
Тема 15. Определенный интеграл и его свойства. Интегрируемость некоторых классов функций.	19	2	1	3	16
Тема 16. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл.	17	2	1	3	14
Тема 17. Числовые ряды. Понятие суммы числового ряда.	13	1	2	3	10
Тема 18. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.	13	1	2	3	10
Тема 19. Признаки сходимости числовых рядов.	13	1	2	3	10
Тема 20. Абсолютная и условная сходимость рядов.	13	1	2	3	10
Тема 21. Функциональные ряды. Основные понятия.	13	1	2	3	10
Тема 22. Равномерная сходимость функциональных рядов.	13	1	2	3	10
Тема 23. Интегрируемость и дифференцируемость функциональных рядов.	13	1	2	3	10
Тема 24. Степенные ряды. Формула Тейлора. Разложение функциональных рядов в степенные ряды. Приближенные вычисления с помощью рядов.	15	1	2	3	12
Тема 25. Функции нескольких переменных.	11	1		1	10
Тема 26. Дифференцируемые функции нескольких переменных.	12		2	2	10
Тема 27. Частные производные и дифференциалы высших порядков.	13	1	2	3	10
Тема 28. Экстремум функции нескольких переменных.	15	1	2	3	12
Тема 29. Двойной и тройной интегралы.	15	1	2	3	12
Тема 30. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием. Замена переменных в двойном интеграле.	13	1	2	3	10
Тема 31. Двойной интеграл в полярных координатах. Кубируемые тела и их объемы. Понятие тройного интеграла. Замена переменных в тройном интеграле.	13	1	2	3	10
Тема 32. Некоторые применения кратных интегралов. Криволинейные интегралы.	14		2	2	12

Аттестация	108				
КСР	7			7	
Итого	576	38	46	91	377

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Вещественные числа.

Система действительных чисел. непрерывность множества действительных чисел. принцип Дедекинда.

Тема 2. Верхняя и нижние грани. Свойства.

Ограниченные и неограниченные числовые множества. Верхняя и нижняя грани множества. Свойство Архимеда действительных чисел. Принцип вложенных отрезков.

Тема 3. Функции. Основные понятия. Свойства.

Понятие функции. Числовая функция действительной переменной. обратная функция. Композиция функций. Понятие последовательности.

Тема 4. Предел числовой последовательности.

Предел последовательности: определение, геометрический смысл, свойства. Ограниченность сходящейся последовательности. Теоремы Вейерштрасса, Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши существования предела. Число ε как предел последовательности. Бесконечно малые при $n \rightarrow \infty$: определение, свойства. Предел функции на бесконечности. Единственность предела, теоремы о предельном переходе в неравенствах. Арифметические операции над пределами. Бесконечно большие функции, их свойства, связь с бесконечно малыми. Предел отношения двух многочленов при $n \rightarrow \infty$.

Тема 5. Предел функции.

Эквивалентные определения предела функции. Свойства. Способы вычисления пределов функции.

Предел суммы, произведения и частного. Предел композиции функций. Предельный переход в неравенствах. Односторонние пределы. Простейшие приемы раскрытия неопределенностей при вычислении пределов. Первый и второй замечательный пределы.

Тема 6. Сравнение бесконечно малых.

Сравнение функций. Эквивалентные функции. Главная часть. Использование эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов.

Тема 7. Непрерывность.

Непрерывность функции в точке, различные определения и их эквивалентность. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация. Понятие равномерно непрерывной функции. Равномерная непрерывность непрерывной функции на отрезке. Теорема о непрерывности обратной функции.

Тема 8. Свойства непрерывных функций на отрезке. Элементарные функции и их свойства.

Ограниченность, наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке. Теорема Вейерштрасса. Промежуточные значения непрерывных функций. теорема Больцано-Коши.

Определение основных элементарных функций. Свойства. Степенная функция с рациональным показателем. Степень с иррациональным показателем. Показательные и логарифмические функции, их непрерывность.

Тема 9. Дифференцируемость и производная. Правила дифференцируемость. Дифференциал. Основные теоремы о дифференцируемых функциях.

Дифференцируемость функции. Производная и дифференциал, их геометрический и механический смысл. Касательная к кривой. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференцирование суммы, произведения и частного. Производная и дифференциал композиции функций. Производная обратной функции. Производные основных элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Механический смысл производной второго порядка.

Тема 10. Применения дифференциального исчисления к вычислению пределов и приближенным вычислениям.

Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталья. Формула Тейлора. Разложение элементарных

функций по формуле Тейлора.

Тема 11. Приложения дифференциального исчисления к исследованию функций и построению их графиков.

Признаки постоянства, возрастания и убывания функции в точке и на промежутке. Максимум и минимум. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия максимума и минимума. Нахождение наибольших и наименьших значений. Выпуклые функции. Точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функции.

Тема 12. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа о конечных приращениях. Теорема Коши.

Тема 13. Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование подстановкой и по частям. Задача восстановления функции по ее производной. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Общие методы интегрирования: метод интегрирования по частям и метод замены переменной. Интегрирование в конечном виде.

Тема 14. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование алгебраических иррациональностей. Классы простейших дробей. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование функции вида $R(x, \tan x + b \sec x + d)$. Биномиальный дифференциал. Интегрирование трансцендентных функций.

Тема 15. Определенный интеграл и его свойства. Интегрируемость некоторых классов функций. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интегрируемость функции и определенный интеграл. Нижние и верхние суммы Дарбу. Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции. Интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.

Тема 16. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования по частям и заменой переменной в определенном интеграле.

Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах. Принцип Кавальери. Вычисление объема тела вращения. Вычисление длины гладкой дуги. Дифференциал длины дуги. Вычисление площади поверхности вращения.

Понятие несобственного интеграла. Геометрическая интерпретация несобственного интеграла. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Тема 17. Числовые ряды. Понятие суммы числового ряда.

Понятие числового ряда. Его частичные суммы. Геометрическая прогрессия как числовой ряд.

Тема 18. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.

Сходящиеся ряды. Сложение рядов и умножение ряда на число. Остаток сходящегося ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда. Гармонический ряд. Критерий Коши сходимости числовой последовательности и числового ряда. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами.

Тема 19. Признаки сходимости числовых рядов.

Положительные ряды. Сравнение рядов с положительными членами. Признаки Даламбера и Коши. Предельные формы признаков Коши и Даламбера. Интегральный признак Коши-Маклорена.

Тема 20. Абсолютная и условная сходимость рядов.

Знакопеременные и знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Абсолютно сходящиеся ряды. Теорема Коши.

Тема 21. Функциональные ряды. Основные понятия.

Функциональная последовательность и функциональный ряд. Предельная функция. Область сходимости.

Тема 22. Равномерная сходимость функциональных рядов.

Равномерная и поточечная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда.

Необходимый и достаточный признак равномерной сходимости. Признак равномерной и абсолютной сходимости. Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

Тема 23. Интегрируемость и дифференцируемость функциональных рядов.

Интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.

Тема 24. Степенные ряды. Формула Тейлора. Разложение функциональных рядов в степенные ряды.

Приближенные вычисления с помощью рядов.

Понятие степенного ряда. Интервал и радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Равномерная сходимость степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Задача разложения функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Разложение функций $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^n$ в степенной ряд. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов.

Тема 25. Функции нескольких переменных.

Действительная функция n действительных переменных как функция точки пространства R_n . График функции двух переменных, линии уровня. Поверхности уровня функции трех переменных.

Тема 26. Дифференцируемые функции нескольких переменных.

Частные производные, дифференцируемость и дифференциал функции нескольких переменных.

Достаточное условие дифференцируемости. Дифференцирование сложной функции, Инвариантность формы первого дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции. Вычисление частных производных неявно заданных функций.

Тема 27. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные высших порядков. Равенство смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Тема 28. Экстремум функции нескольких переменных.

Понятия максимума и минимума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.

Достаточные условия максимума и минимума для функции двух переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений.

Тема 29. Двойной и тройной интегралы.

Квадрируемые фигуры и их площади. Кубируемые тела и их объемы. задачи приводящие к понятию двойного интеграла. Понятие двойного интеграла.

Тема 30. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием. Замена переменных в двойном интеграле.

Основные свойства двойного интеграла. Интегрируемость непрерывной функции. Повторный интеграл. Вычисление двойного интеграла для прямоугольной области и для областей I и II типа. Замена переменных в двойном интеграле.

Тема 31. Двойной интеграл в полярных координатах. Понятие тройного интеграла. Замена переменных в тройном интеграле.

Формула двойного интеграла в полярных координатах. Цилиндрические координаты.

Тема 32. Некоторые применения кратных интегралов. Криволинейные интегралы.

Задача о работе плоского силового поля. Криволинейный интеграл и его основные свойства.

Вычисление криволинейных интегралов. Формула Грина. Криволинейные интегралы, зависящие только от начала и конца пути интегрирования. Вычисление объемов тел. Вычисление площадей гладких поверхностей.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Математический анализ (1 курс), Математический анализ (2 курс),

<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=8375> , <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=9291>.

Иные учебно-методические материалы:

Учебно-методические документы, регламентирующие самостоятельную работу
адреса доступа к документам:

<https://arz.unn.ru/sveden/document/>

http://www.arz.unn.ru/pdf/Metod_all_all.pdf

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Опрос) для оценки сформированности компетенции УК-1:

Семестр 1

1. Понятие последовательности.
2. Определение предела последовательности.
3. Предельный переход в равенствах и неравенствах для последовательностей.
4. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями.
5. Бесконечно малые последовательности и их свойства.
6. Число e как предел последовательности.

Семестр 2

1. Определение производной. Таблица производных.
2. Геометрический и механический смысл производной.
3. Дифференциал и его связь с производной.
4. Правила вычисления производных. Производная суммы, произведения и частного двух функций.
5. Производная обратной и сложной функции.
6. Производные и дифференциалы высших порядков. Высшие производные для основных элементарных функций (логарифмическая, показательная, степенная, тригонометрические: синус и косинус).
7. Раскрытие неопределённостей по правилам Лопиталя.
8. Формула Тейлора.
9. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора.

Семестр 3

1. Числовой ряд, его частичные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды.
2. Геометрическая прогрессия.
3. Необходимый признак сходимости.

4. Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд.
5. Сложение рядов и умножение ряда на число.
6. Положительные ряды. Признак сравнения рядов с положительными членами.

Семестр 4

1. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
2. Понятие частной производной. Дифференциал функции нескольких переменных, условие дифференцируемости.
3. Дифференцируемость сложной функции.
4. Производная по направлению.
5. Градиент.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Опрос) для оценки сформированности компетенции ПКР-4:

Семестр 1

1. Понятие предела функции.
2. Односторонние пределы.
3. Свойства предела функции.
4. Замена переменной при вычислении предела функции.
5. Понятие непрерывности функции в точке.
6. Точки разрыва функции и их классификация.
7. Замечательные пределы.
8. Эквивалентности бесконечно малых.

Семестр 2

1. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора.
2. Признаки возрастания и убывания функции в точке и на промежутке.
3. Понятия максимума и минимума.
4. Необходимые условия экстремума.
5. Достаточные условия экстремума. Первое и второе правило исследования функции на экстремум.
6. Выпуклые и вогнутые кривые. Необходимое условие выпуклости (вогнутости).
7. Достаточное условие выпуклости (вогнутости) кривой.
8. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия перегиба.
9. Вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты.
10. Общая схема исследования функции.

Семестр 3

1. Признаки Даламбера и Коши.
2. Предельная форма признаков Даламбера и Коши.
3. Интегральный признак Коши-Маклорена.
4. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница.
5. Абсолютная и условная сходимость рядов. Теорема Коши.
6. Степенные ряды, их область сходимости.
7. Разложение функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ в ряд Тейлора.

Семестр 4

1. Частные производные высших порядков.

2. Дифференциалы высших порядков.
3. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
4. Неявные функции. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции
5. Понятия максимума и минимума функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума.
6. Достаточные условия экстремума.

Критерии оценивания (оценочное средство - Опрос)

Оценка	Критерии оценивания
отлично	Оценка «отлично» выставляется, когда студент глубоко и прочно усвоил весь программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, правильно обосновывает решения, умеет самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок.
хорошо	Оценка «хорошо» выставляется, если студент твердо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, может правильно применять теоретические положения.
удовлетворительно	Оценка «удовлетворительно» выставляется в том случае, при котором студент освоил только основные категории темы (определения, формулы, свойства, формулировки теорем), но допускает неточности, нарушает последовательность в изложении программного материала.
неудовлетворительно	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, в ответе которого обнаружились существенные пробелы в знании основного содержания учебной программы дисциплины или грубые ошибки.

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Коллоквиум) для оценки сформированности компетенции УК-1:

Семестр 1

1. Система действительных чисел. Непрерывность множества действительных чисел. Принцип Дедекинда.
2. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Верхняя и нижняя грань множества. Свойства Архимеда действительных чисел. Принцип вложенных отрезков.
3. Понятие функции. Числовая функция действительной переменной. Обратная функция. Композиция функций. Понятие последовательности.
4. Определение предела последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Бесконечные пределы.
5. Свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в равенствах и неравенствах для последовательностей.
6. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями.
7. Бесконечно малые последовательности и их свойства.
8. Предел монотонной последовательности.
9. Число e как предел последовательности.

Семестр 2

1. Определение производной. Таблица производных.
2. Геометрический и механический смысл производной.
3. Дифференциал и его связь с производной.
4. Правила вычисления производных. Производная суммы, произведения и частного двух функций.
5. Производная обратной и сложной функции.
6. Производные и дифференциалы высших порядков. Высшие производные для основных элементарных функций (логарифмическая, показательная, степенная, тригонометрические: синус и косинус).
7. Раскрытие неопределённостей по правилам Лопиталя.
8. Формула Тейлора.

Семестр 3

1. Числовой ряд, его частичные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Критерий Коши для рядов.
2. Геометрическая прогрессия.
3. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд.
4. Остаток ряда. Свойства остатка.
5. Сложение рядов и умножение ряда на число.
6. Положительные ряды. Признак сравнения рядов с положительными членами.

Семестр 4

1. Функция нескольких переменных. Линия и поверхность уровня. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
2. Понятие частной производной. Дифференциал функции нескольких переменных, условие дифференцируемости.
3. Дифференцируемость сложной функции.
4. Инвариантность формы дифференциала первого порядка функции нескольких переменных.
5. Производная по направлению. Градиент.
6. Частные производные высших порядков и их независимость от порядка дифференцирования.
7. Дифференциалы высших порядков.

5.1.4 Типовые задания (оценочное средство - Коллоквиум) для оценки сформированности компетенции ПКР-4:

Семестр 1

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
2. Критерий Коши сходимости последовательностей.
3. Представление действительных чисел десятичными дробями.
4. Понятие предела функции. Эквивалентность различных определений предела функции. Односторонние пределы.
5. Свойства предела функции. Замена переменной при вычислении предела функции. Пределы монотонных функций.
6. Критерий Коши существования предела функции.
7. Понятие непрерывности функции в точке. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства функций непрерывных в точке.
8. Ограниченность функций непрерывных на отрезке. Достижение экстремальных значений (теорема Вейерштрасса).
9. Промежуточные значения непрерывных функций. Теорема Больцано-Коши.

10. Показательная функция и её свойства.
11. Существование и непрерывность обратной функции. Логарифмическая и степенная функции и их свойства.
12. Замечательные пределы.

Семестр 2

1. Теорема Коши.
2. Раскрытие неопределённостей по правилам Лопиталя. (три теоремы)
3. Формула Тейлора.
4. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора.
5. Признак постоянства функции на промежутке.
6. Признаки возрастания и убывания функции в точке и на промежутке.
7. Понятия максимума и минимума. Необходимые условия экстремума.
8. Достаточные условия экстремума. Первое и второе правило исследования функции на экстремум.
9. Выпуклые и вогнутые кривые. Необходимое условие выпуклости (вогнутости).
10. Достаточное условие выпуклости (вогнутости) кривой.
11. Точки перегиба. Поведение функции в окрестности точки перегиба.
12. Вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты. Схема исследования функции.

Семестр 3

1. Признаки Даламбера и Коши.
2. Предельная форма признаков Даламбера и Коши.
3. Интегральный признак Коши-Маклорена.
4. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница.
5. Абсолютная и условная сходимость рядов. Теорема Коши.
6. Степенные ряды, их область сходимости.
7. Ряд Тейлора.
8. Разложение функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ в ряд Тейлора.

Семестр 4

1. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
2. неявные функции. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции (I часть).
3. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции (II, III часть).
4. Понятия максимума и минимума функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума.
5. Достаточные условия экстремума.
6. Квадрируемые фигуры. Критерии квадрируемости. Кривая меры 0, её связь с квадрируемостью. Площадь спрямляемой кривой. Кубируемые тела.
7. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Двойной интеграл.

Критерии оценивания (оценочное средство - Коллоквиум)

Оценка	Критерии оценивания
отлично	Оценка «отлично» выставляется, когда студент глубоко и прочно усвоил весь программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, не затрудняется с ответом при видоизменении задания, правильно обосновывает решения, умеет

Оценка	Критерии оценивания
	самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок.
хорошо	Оценка «хорошо» выставляется, если студент твердо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, может правильно применять теоретические положения.
удовлетворительно	Оценка «удовлетворительно» выставляется в том случае, при котором студент освоил только основные категории темы (определения, формулы, свойства, формулировки теорем), но допускает неточности, нарушает последовательность в изложении программного материала, испытывает существенные затруднения при доказательствах или совсем их не проводит.
неудовлетворительно	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, в ответе которого обнаружились существенные пробелы в знании основного содержания учебной программы дисциплины или грубые ошибки.

5.1.5 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции УК-1:

Семестр 1

Выберите один верный ответ

1. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 4}{x^2}$

1) 4; 2) 3; 3) 5; 4) 0

2. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 6x + 1}{3x^4}$

1) 1; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{8}{4}$; 4) $\frac{8}{3}$

3. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right)^2$

1) 9; 2) 2; 3) 3; 4) 0

4. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 3x - 4}{2x + 3}$

1) 3; 2) 2; 3) 0; 4) 1

5. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

1) 8; 2) 4; 3) 12; 4) 9

Семестр 2

Выберете один верный ответ

1. Производная y' функции равна: $y = \left(x^2 - \frac{1}{x} + 5\right)^3$

1) $y' = 3\left(x^2 - \frac{1}{x} + 5\right)^2 \cdot \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$; 2) $y' = 3\left(x^2 - \frac{1}{x} + 5\right)^2$;

3) $y' = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$; 4) $y' = 3 \cdot \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^2$

2. Производная y' функции равна: $y = \frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$

1) $\frac{3x^2+5x+2}{(2x+7)^2\sqrt{2x-1}}$; 2) $\frac{2x^2+15x+20}{(2x+7)^2\sqrt{2x-1}}$;

3) $\frac{2x^2+15x+20}{(2x+5)^2\sqrt{3x-1}}$; 4) $\frac{2x^2+10x+20}{(2x+7)^2\sqrt{2x-1}}$

3. Производная y' функции равна: $y = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}}$

1) $e^x \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}$; 2) $\sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}$; 3) $e^x \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}$; 4) $e^{2x} \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}$

4. Производная y' функции равна: $y = \cos^2 \sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$

1) $\frac{\sin 50x}{\cos^2 58x}$; 2) $\frac{\cos 58x}{\sin^2 58x}$; 3) $\frac{\sin 58x}{\cos^2 50x}$; 4) $\frac{\sin 58x}{\cos^2 58x}$

5. Горизонтальная асимптота графика функции $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}$

1) $y = 0$; 2) $y = -1$; 3) $y = 2$; 4) $y = 1$

6. Вертикальная асимптота графика функции $y = \frac{e^{x-3}}{x-3}$:

1) $x = 0$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3$; 4) $x = -3$

7. Функция $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}$ имеет локальный минимум в точке:

1) $x = 3$; 2) $x = 1$; 3) $x = -3$; 4) $x = 0$

8. Функция $y = \frac{e^{x-3}}{x-3}$ имеет локальный минимум в точке:

1) $x = -4$; 2) $x = -1$; 3) $x = 4$; 4) $x = 0$

9. Функция $y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$ убывает на промежутке:

1) $[2, 6]$; 2) $[-6, -2]$; 3) $(0, +\infty)$; 4) $[-3, 0]$

10. Функция $y = e^{\sqrt{2} \cos x}$ возрастает на промежутке:

1) $[0, \pi]$; 2) $[\pi, 2\pi]$; 3) $(0, 1)$; 4) $[-\pi, 0]$

Семестр 3

Выберете один верный ответ

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 \sin^2 n}$.

1) Сходится; 2) Расходится

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}$.

1) Сходится; 2) Расходится

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

1) Сходится; 2) Расходится

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$.

1) Сходится; 2) Расходится

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

1) Сходится; 2) Расходится

Семестр 4

Выберете один верный ответ

1. Предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ функции $f(x, y) = (x + y) \sin(1/x) \sin(1/y)$ равен:

1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) 2

2. Предел $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$ равен:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) -1

3. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = e^{x^2 y}$ равна:

1) $xye^{x^2 y}$; 2) $2xe^{x^2 y}$; 3) $2xye^{xy}$; 4) $2xye^{x^2 y}$

4. Частная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ функции $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ равна:

1) $\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$; 2) $\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; 3) $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$; 4) $\frac{2xy}{(x + y)^2}$

5. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, проходящей через точку $(2, 3, 2)$, имеет вид:

1) $x + \frac{2}{3}y - z - 1 = 0$; 2) $x + \frac{1}{3}y - z - 2 = 0$; 3) $x + \frac{2}{3}y - z - 2 = 0$;

4) $2x + \frac{2}{3}y - z - 2 = 0$

6. Производная функции $z = x^2 + y^2x$ в точке $A(1, 2)$ по направлению вектора \overline{AB} , где $B(3, 0)$, равна:

1) $\sqrt{3}$; 2) 1; 3) $\sqrt{2}$; 4) 2

7. Функция $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ имеет локальный максимум в точке:

1) $(-1, 0)$; 2) $\left(0, \frac{5}{3}\right)$; 3) $(0, 0)$; 4) $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

8. Частная производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ неявной функции $u = \varphi(x, y)$, заданной уравнением

$x + y + u - e^{-(x+y+u)} = 0$, равна:

1) $\frac{x}{y}$; 2) 0; 3) xy^2 ; 4) 1

9. В точке $(1, 1)$ функция $1/x + 1/y = z$ при уравнении связи $x + y = 2$ имеет:

1) Условный минимум; 2) Условный максимум; 3) Не имеет условного экстремума.

10. В точке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ функция $z = x - y$ при уравнении связи $x^2 + y^2 = 1$ имеет:

1) Условный минимум; 2) Условный максимум; 3) Не имеет условного экстремума.

5.1.6 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ПКР-4:

Семестр 1

1. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 5x \cdot \sin 3x$

1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $\frac{8}{5}$; 4) 0

2. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\sin 4x}$

1) $\frac{7}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{7}{4}$; 4) 0

3. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$

4. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$

1) e ; 2) 1; 3) e^2 ; 4) e^5

5. Предел функции равен: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos x)^{1/x^2}$

1) $e^{-1/2}$; 2) 0; 3) $e^{1/2}$; 4) e

Выберите один верный ответ

1. Интеграл $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$ равен:

- 1) $-x \operatorname{ctgx} + \ln |\sin x| + C$; 2) $-x \operatorname{tgx} + \ln |\sin x| + C$; 3) $-x \operatorname{ctgx} + \ln |\cos x| + C$; 4) $-\operatorname{ctgx} + \ln |\sin x| + C$

2. Интеграл $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$ равен:

- 1) $\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$; 2) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$; 3) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$; 4) $\frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + C$

3. Интеграл $\int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}$ равен:

- 1) $\frac{3\pi}{8}$; 2) $-\frac{\pi}{8}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{\pi}{4}$

4. Интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}$ равен:

- 1) $\frac{\pi(18 - 4\sqrt{3})}{9}$; 2) $\frac{\pi(9 - 4\sqrt{3})}{9}$; 3) $\frac{\pi(9 - 2\sqrt{3})}{18}$; 4) $\frac{\pi(9 - 4\sqrt{3})}{18}$

5. Интеграл $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$ равен:

- 1) 3; 2) 1; 3) 0; 4) 4

6. Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x-1)^2$, $y^2 = x-1$ равна:

- 1) 1; 2) 3; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$

7. Объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$ вокруг оси Ox равен:

- 1) 1; 2) $\frac{5\pi}{7}$; 3) $\frac{5\pi}{14}$; 4) $\frac{3\pi}{14}$

8. Объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$; $y = x$ вокруг оси Oy равен:

- 1) $\frac{8\pi}{15}$; 2) $\frac{3\pi}{18}$; 3) $\frac{5\pi}{14}$; 4) $\frac{\pi}{15}$

9. Длина линии $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ от точки $x = 0$ до точки $x = 1$ равна:

- 1) $\frac{1}{4}(e - e^{-1})$; 2) $\frac{1}{2}(e - e^{-1})$; 3) $\frac{1}{2}(e + e^{-1})$; 4) $\frac{1}{2}(e - e^{-2})$

10. Длина линии $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$ равна:

- 1) 6; 2) 18; 3) 12; 4) 24

Семестр 3

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$.

- 1) Сходится; 2) Расходится

2. Область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x^2}$:

- 1) $(-\infty, +\infty)$; 2) $(0, +\infty)$; 3) $\{0\}$; 4) $(-\infty, 0)$

3. Область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}}$:

- 1) $(-10, 10)$; 2) $(-10, 10]$; 3) $[-10, 0)$; 4) $[-10, 10)$

4. Область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$:

- 1) $(-1, 1)$; 2) $[-1, 1]$; 3) $[-1, 1)$; 4) $[0, 1)$

5. Область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$:

- 1) $[-1, 1]$; 2) $[-1, 0]$; 3) $[-1, 1)$; 4) $(-1, 1)$

Семестр 4

Выберите один верный ответ

1. Если $D = [0, 1] \times [2, 3]$, $f(x, y) = x^3 y$, то интеграл $\iint_D x^3 y dx dy$ равен:

- 1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{5}{8}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{8}$

2. Если D ограничена кривыми $y = x^2$, $x = y^2$, то интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$ равен:

- 1) $\frac{3}{10}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) 1; 4) $\frac{3}{5}$

3. Интеграл $\iint_D e^{(x^2+y^2)} dx dy$, где область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = R^2$, равен:

- 1) $\pi(e^{R^2} + 1)$; 2) $\pi(e^R - 1)$; 3) 2; 4) $\pi(e^{R^2} - 1)$

4. Тройной интеграл $\iiint_D dx dy dz$, где область D ограничена поверхностями: $\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ 3z &= x^2 + y^2 \end{aligned} \right\}$

равен:

- 1) $\frac{16\pi}{9}$; 2) $\frac{4\pi}{16}$; 3) $\frac{9\pi}{16}$; 4) $\frac{\pi}{16}$

5. Площадь куска параболоида $2z = x^2 + y^2$, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ равна:

- 1) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$; 2) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)$; 3) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} + 1)$; 4) $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

6. Если $du = (2xy + 1)dx + (x^2 + 3y^2)dy$, то $u(x, y)$ имеет вид:

1) $u(x, y) = x^2y + x + y^2 + C$; 2) $u(x, y) = x^2y^2 + x + y^3 + C$;

3) $u(x, y) = x^2y + x + y^3 + C$; 4) $u(x, y) = x^2y + x^2 + y^3 + C$

7. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2x$ и $y^2 = x$ равна:

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{1}{9}$

8. Объем тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$, равен:

1) $\frac{64}{13}$; 2) $\frac{128}{13}$; 3) $\frac{64}{15}$; 4) $\frac{128}{15}$

9. Площадь S части поверхности параболоида $z = xy$, принадлежащей цилиндру $x^2 + y^2 \leq R^2$, равна:

1) $\frac{2\pi}{3} \left[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$; 2) $\frac{2\pi}{3} \left[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} + 1 \right]$; 3) $\frac{\pi}{3} \left[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$;

4) $\frac{2\pi}{3} \left[(1 + R^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$

10. Тройной интеграл $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, где тело V ограничено плоскостью $z = 2$ и параболоидом $2z = x^2 + y^2$, равен:

1) $\frac{32}{3}\pi$; 2) $\frac{16}{5}\pi$; 3) $\frac{16}{3}\pi$; 4) $\frac{8}{3}\pi$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)

Оценка	Критерии оценивания
отлично	Оценка «отлично» 80 – 100 % правильных ответов.
хорошо	Оценка «хорошо» 60 – 79 % правильных ответов.
удовлетворительно	Оценка «удовлетворительно» 40 – 59% правильных ответов.
неудовлетворительно	Оценка «неудовлетворительно» менее 40% правильных ответов.

5.1.7 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции УК-1:

Семестр 1

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ и доказать его существование по определению

(найти $\delta(\varepsilon)$).

2. Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя-Бернулли:

$$2.1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 7x}{3x^3};$$

$$2.2 \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x});$$

$$2.3 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{3x}};$$

$$2.4 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}.$$

3. Найти точки разрыва функции $y = \begin{cases} 2^{1/(x-3)}, & x < 4; \\ 5 - x, & x \geq 4. \end{cases}$ и исследовать их характер.

Семестр 2

1. Найти производную $y = \ln \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
2. Найти первый dy , и второй d^2y дифференциалы функции $y = \sin \frac{1}{x} - \frac{x}{x+1}$.
3. Записать формулу для производной n -ого порядка функции $y = \sin x + \cos 2x$ и вычислить ее значение в точке $x_0 = 0$.
4. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} (x^n \ln x)$.
5. Исследовать функцию и построить ее график $y = (x + 4)e^{2x}$.

Семестр 3

1. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$
2. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n^2}$
3. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)!}{2^n}$
4. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x+4)^n$
5. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x : $(1+x)e^{-2x}$

Семестр 4

1. Найти все частные производные первого порядка функции: $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$.
2. Найти производные неявной функции $x^z = \frac{z}{y}$ в точке $M_0(1, 1, 1)$.
3. Для функции $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$ найти dz , d^2z , d^3z в точке $M(1, 1)$.
4. Показать, что функция $z = \frac{x}{y}$ удовлетворяет равенству $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
5. Найти частные производные сложной функции $z = (\cos w)u^v$, где $u = \sqrt{x^2 + y}$, $v = \ln(xy)$, $w = x^y$.
6. Найти экстремумы функции $z = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} y/x$.

5.1.8 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПКР-4:

Семестр 1

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$ и доказать его существование по определению (найти $\delta(\varepsilon)$).
2. Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя-Бернулли:
 - 2.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x^2}$;
 - 2.2 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x(x+1)}{3(x^2-1)}$;
 - 2.3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{7x}$;
 - 2.4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 5}}{\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{3x^3 + x + 1}}$.
3. Найти точки разрыва функции $y = \begin{cases} x^2, & x < 2; \\ 3^{1/(3-x)}, & x \geq 2. \end{cases}$ и исследовать их характер.

Семестр 2

1. Найти интеграл (занесение под знак дифференциала) $\int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx$
2. Найти интеграл (интегрирование по частям) $\int (x\sqrt{2} - 3) \cos 2x dx$.
3. Найти интеграл (интегрирование дробей) $\int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx$.
4. Найти интеграл (интегрирование иррациональностей) $\int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx$

Семестр 3

1. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \sin n\alpha}$.
2. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 5n - 1}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n$.
3. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$.
4. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n3^n}$.
5. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x : $\frac{1}{x^2 + 9x + 20}$.

Семестр 4

1. Изменить порядок интегрирования $\int_0^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$.
2. Вычислить площадь фигуры ограниченную линиями $y = x, y^2 = 2x$.
3. Вычислить площадь (переход в полярные координаты)
 $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0, y = \sqrt{3}x, y = x$.
4. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями
 $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, 6z = x^2 + y^2$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
отлично	Оценка «отлично» в работе представлено полностью верное решение всех обязательных задач.
хорошо	Оценка «хорошо» в работе представлено полностью верное решение $\frac{3}{4}$ обязательных задач.
удовлетворительно	Оценка «удовлетворительно» в работе представлено полностью верное решение половины обязательных задач.
неудовлетворительно	Оценка «неудовлетворительно» решено меньше половины обязательных задач.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично
	не зачтено	зачтено		
<u>Знания</u>	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
<u>Умения</u>	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме
<u>Навыки</u>	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Система действительных чисел. Непрерывность множества действительных чисел. Принцип Дедекинда.
2. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Верхняя и нижняя грань множества. Свойства Архимеда действительных чисел. Принцип вложенных отрезков.

3. Понятие функции. Числовая функция действительной переменной. Обратная функция. Композиция функций. Понятие последовательности.
4. Определение предела последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Бесконечные пределы.
5. Свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в равенствах и неравенствах для последовательностей.
6. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями.
7. Бесконечно малые последовательности и их свойства.
8. Предел монотонной последовательности.
9. Число ε как предел последовательности.
10. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
11. Критерий Коши сходимости последовательностей.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПКР-4

1. Представление действительных чисел десятичными дробями.
2. Понятие предела функции. Эквивалентность различных определений предела функции. Односторонние пределы.
3. Свойства предела функции. Замена переменной при вычислении предела функции. Пределы монотонных функций.
4. Критерий Коши существования предела функции.
5. Понятие непрерывности функции в точке. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства функций непрерывных в точке.
6. Ограниченность функций непрерывных на отрезке. Достижение экстремальных значений (теорема Вейерштрасса).
7. Промежуточные значения непрерывных функций. Теорема Больцано-Коши.
8. Показательная функция и её свойства.
9. Существование и непрерывность обратной функции. Логарифмическая и степенная функции и их свойства.
10. Замечательные пределы.
11. Сравнение функций. Эквивалентные функции. Главная часть функции.

12. Равномерная непрерывность функцию Теорема Кантора.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Оценка «зачтено» выставляется в том случае, если студент представил все основные категории темы без ошибок.
не зачтено	Оценка «незачтено» выставляется студенту, в ответе которого обнаружились существенные пробелы в знании основного содержания учебной программы дисциплины или грубые ошибки.

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

Семестр 2

1. Определение производной. Непрерывность функции имеющей производную. Таблица производных. (вывод: константа, косинус, a^x , $\arctg x$)
2. Геометрический и механический смысл производной.
3. Дифференциал и его связь с производной.
4. Правила вычисления производных. Производная суммы, произведения и частного двух функций.
5. Производная обратной и сложной функции. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.
6. Производные и дифференциалы высших порядков. Высшие производные для основных элементарных функций (логарифмическая, показательная, степенная, тригонометрические: синус и косинус).
7. Теорема Ферма.
8. Теорема Ролля.
9. Теорема Лагранжа о конечных приращениях.
10. Теорема Коши.
11. Раскрытие неопределённостей по правилам Лопиталя. (теоремы 1, 1', 2)
12. Формула Тейлора.
13. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора.
14. Признак постоянства функции на промежутке.
15. Признаки возрастания и убывания функции в точке и на промежутке.

16. Понятия максимума и минимума. Необходимые условия экстремума.
17. Достаточные условия экстремума. Первое и второе правило исследования функции на экстремум.
18. Выпуклые и вогнутые кривые. Необходимое условие выпуклости (вогнутости).
19. Достаточное условие выпуклости (вогнутости) кривой.
20. Точки перегиба. Поведение функции в окрестности точки перегиба.
21. Вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты. Схема исследования функции.

Семестр 3

1. Числовой ряд, его частичные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Критерий Коши для рядов.
2. Геометрическая прогрессия.
3. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд.
4. Остаток ряда. Свойства остатка.
5. Сложение рядов и умножение ряда на число.
6. Положительные ряды. Признак сравнения рядов с положительными членами.
7. Признаки Даламбера и Коши.
8. Предельная форма признаков Даламбера и Коши.
9. Интегральный признак Коши-Маклорена.
10. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница.
11. Абсолютная и условная сходимость рядов. Теорема Коши.
12. Степенные ряды, их область сходимости.
13. Ряд Тейлора.
14. Разложение функций e^x , $\cos x$, $\sin x$ в ряд Тейлора.

Семестр 4

1. Функция нескольких переменных. Линия и поверхность уровня. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
2. Понятие частной производной. Дифференциал функции нескольких переменных условие дифференцируемости.

3. Дифференцируемость сложной функции.
4. Инвариантность формы дифференциала первого порядка функции нескольких переменных.
5. Производная по направлению. Градиент.
6. Частные производные высших порядков и их независимость от порядка дифференцирования.
7. Дифференциалы высших порядков.
8. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
9. неявные функции. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции (I часть).
10. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции (II, III часть).
11. Понятия максимума и минимума функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума.
12. Достаточные условия экстремума.
13. Квадрируемые фигуры. Критерии квадрируемости. Кривая меры 0, её связь с квадрируемостью. Площадь спрямляемой кривой. Кубируемые тела.
14. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Двойной интеграл.

5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПКР-4

Семестр 2

1. Первообразная функции. Общий вид семейства первообразных.
2. Неопределённый интеграл и его простейшие свойства.
3. Таблица основных интегралов (с выводами).
4. Интегрирование функций методом замены переменной.
5. Метод интегрирования по частям.
6. Интегрирование простейших дробей I, II, и III типов.
7. Интегрирование простейшей дроби IV типа.

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

8. Интегрирование функции вида
9. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

10. Интегрирование выражений содержащих тригонометрические функции.
11. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла.
12. Суммы Дарбу и их свойства.
13. Критерий интегрируемости.
14. Свойства определённого интеграла.
15. Интеграл с переменным верхним пределом.
16. Формула Ньютона-Лейбница.
17. Формула интегрирования по частям в определённом интеграле.
18. Метод замены переменной в определённом интеграле.
19. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах.
20. Вычисление объёма тела по площадям параллельных сечений. Вычисление объёма тела вращения.
21. Несобственный интеграл. Его геометрическая интерпретация.

Семестр 3

1. Предельные точки множества. Критерий предельной точки.
2. Топологические отношения точки к множеству.
3. Замкнутые множества. Примеры замкнутых множеств. Эквивалентность определений замкнутого множества.
4. Теорема о дополнении замкнутого множества.
5. Законы двойственности. Свойства замкнутых множеств.
6. Теорема о границе замкнутого множества.
7. Отображения метрических пространств.
8. Нормированные пространства, примеры.
9. Полные метрические пространства.
10. Сжимающие отображения. Теорема Банаха.
11. Ограниченные множества. Покоординатная сходимость в пространстве R_n .
12. Теорема Больцано-Вейерштрасса для пространства R_n .

13. Компакты. Замкнутость и ограниченность компакта.

14. Компакты в R_n .

15. Теорема Бореля-Лебега.

16. Непрерывные отображения на компакте.

Семестр 4

1. Свойства двойного интеграла.

2. Интегрируемость непрерывной функции.

3. Вычисление двойного интеграла в случае прямоугольной области.

4. Вычисление двойного интеграла в случае криволинейной области.

5. Задача о работе плоского силового поля. Криволинейный интеграл.

6. Свойства криволинейного интеграла.

7. Вычисление криволинейного интеграла.

8. Формула Грина. (I часть)

9. Формула Грина. (II часть)

10. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. (необходимость)

11. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. (достаточность)

12. Замена переменных в двойном интеграле.

13. Двойной интеграл в полярных координатах.

14. Выражение площади плоской фигуры через интеграл по её контуру.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
отлично	Оценка «отлично» выставляется, когда студент глубоко и прочно усвоил весь программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, не затрудняется с ответом при видоизменении задания, правильно обосновывает решения, умеет самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок.
хорошо	Оценка «хорошо» выставляется, если студент твердо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, может правильно применять теоретические

Оценка	Критерии оценивания
	положения.
удовлетворительно	Оценка «удовлетворительно» выставляется в том случае, при котором студент освоил только основные категории темы (определения, формулы, свойства, формулировки теорем), но допускает неточности, нарушает последовательность в изложении программного материала, испытывает существенные затруднения при доказательствах или совсем их не проводит.
неудовлетворительно	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, в ответе которого обнаружились существенные пробелы в знании основного содержания учебной программы дисциплины или грубые ошибки.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Будаев В. Д. Математический анализ. Функции одной переменной / Будаев В. Д., Якубсон М. Я. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 544 с. - Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образованию Министерства образования и науки РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 050200 — «Физико-математическое образование». - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-1186-3., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=799776&idb=0>.
2. Будаев В. Д. Математический анализ. Функции нескольких переменных / Будаев В. Д., Якубсон М. Я. - 2-е изд. стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 456 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-8294-8., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=756122&idb=0>.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : Учебное пособие для вузов / Берман Г. Н. - 10-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 492 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-9878-9., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=798067&idb=0>.
4. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Часть 1 : учебник для вузов / Фихтенгольц Г. М. - 16-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2024. - 448 с. - Допущено Министерством образования и науки РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям в области естественных наук и математики, техники и технологий, образования и педагогики. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-47695-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=896965&idb=0>.
5. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Часть 2 : учебник для вузов / Фихтенгольц Г. М. - 15-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2024. - 464 с. - Допущено Министерством образования и науки РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям в области естественных наук и математики, техники и технологий, образования и педагогики. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-50322-3., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?>

Action=FindDocs&ids=899684&idb=0.

Дополнительная литература:

1. Калитвин А. С. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных / Калитвин А. С. - Липецк : Липецкий ГПУ, 2019. - 81 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции Липецкий ГПУ - Математика. - ISBN 978-5-907168-66-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=732069&idb=0>.
2. Вендина А. А. Математический анализ для педагогов : учебное пособие / Вендина А. А., Севрюков П. Ф. - Ставрополь : СГПИ, 2017. - 104 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции СГПИ - Психология. Педагогика. - ISBN 978-5-6040510-7-8., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=720418&idb=0>.
3. Калитвин А. С. Неопределенный интеграл : Учебное пособие для студентов педагогических вузов. Ч. 3 : Неопределенный интеграл / Калитвин А. С. - Липецк : Липецкий ГПУ, 2017. - 64 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции Липецкий ГПУ - Математика. - ISBN 978-5-88526-863-9., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=719664&idb=0>.
4. Калитвин А. С. Определенный интеграл : Учебное пособие для студентов педагогических вузов. Ч. 4 : Определенный интеграл / Калитвин А. С. - Липецк : Липецкий ГПУ, 2017. - 110 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции Липецкий ГПУ - Математика. - ISBN 978-5-88526-900-1., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=719719&idb=0>.
5. Вводный курс математического анализа : учебно-методическое пособие для студентов бакалавров физико-математического факультета / Борзенко А. М., Сат Л. А., Шактар О. О., Власова Л. Н., Бичи-оол Е. К. - Кызыл : ТувГУ, 2021. - 82 с. - Книга из коллекции ТувГУ - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=827743&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Лицензионное программное обеспечение: Операционная система Windows.

Лицензионное программное обеспечение: Microsoft Office.

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Российский индекс научного цитирования (РИНЦ), платформа Elibrary: национальная информационно-аналитическая система. Адрес доступа: http://elibrary.ru/project_risc.asp

Свободно распространяемое программное обеспечение:

программное обеспечение LibreOffice;

программное обеспечение Yandex Browser;

Электронные библиотечные системы и библиотеки:

Электронная библиотечная система "Лань" <https://e.lanbook.com/>

Электронная библиотечная система "Консультант студента" <http://www.studentlibrary.ru/>

Электронная библиотечная система "Юрайт" <http://www.urait.ru/ebs>

Электронная библиотечная система "Znaniy" <http://znaniy.com/>

Фундаментальная библиотека ННГУ www.lib.unn.ru/

Сайт библиотеки Арзамасского филиала ННГУ. – Адрес доступа: lib.arz.unn.ru

Ресурс «Массовые открытые онлайн-курсы Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского» <https://mooc.unn.ru/>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 44.03.01 - Педагогическое образование.

Автор(ы): Сангалова Марина Евгеньевна, кандидат педагогических наук, доцент.

Рецензент(ы): Нестерова Лариса Юрьевна, кандидат педагогических наук.

Заведующий кафедрой: Нестерова Лариса Юрьевна, кандидат педагогических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 27.11.2024 г., протокол № №9.