

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

---

Радиофизический факультет  
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от  
«31» мая 2023 г. № 6

**Рабочая программа дисциплины**

---

**Кратные интегралы и ряды**  
(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования  
**бакалавриат**  
(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность  
**03.03.03 Радиофизика**

---

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы  
**Фундаментальная радиофизика**  
(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

---

Форма обучения  
очная  
(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
3	Базовая. Блок 1.	Дисциплина <i>Б1. О.12 Кратные интегралы и ряды</i> относится к базовой части Блока 1 «Дисциплины (модули)» ООП по направлению подготовки <b>03.03.03 "Радиофизика"</b> с профилем «Фундаментальная радиофизика». Дисциплина обязательна для освоения во 2 семестре.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.	ОПК-1.1. Обладает фундаментальным и знаниями в области физики и радиофизики.	Знает основные понятия и теоремы курса «Кратные интегралы и ряды», логические связи между понятиями и теоремами, основные методы доказательств и решения задач в математическом анализе. Умеет применять методы и приемы решения задач из различных разделов дисциплины; применять математические методы для решения задач физики; использовать адекватный математический аппарат; выполнять математическую обработку результатов экспериментов; выполнять приближенные вычисления и оценивать их погрешность; использовать методы математического моделирования в практической деятельности; Владеет методами решения различных задач, понятийным аппаратом дисциплины «Кратные интегралы и ряды», современными знаниями о математическом анализе и его приложениях.	Теоретический вопрос на экзамене

	ОПК-1.2. Анализирует физические аспекты теории и возможности ее использования для решения научно-исследовательских задач.	<p>Знает основополагающие принципы, понятия и факты дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных: основные понятия, формулы, теоремы.</p> <p>Умеет применять методы математического анализа и теории «Кратных интегралов и рядов» к анализу физических аспектов теории при решении научно-исследовательских задач.</p> <p>Владеет опытом анализа физических аспектов математического анализа и его использования для решения научно-исследовательских задач.</p>	Теоретический вопрос на экзамене
	ОПК-1.3. Решает научно-исследовательские задачи, в том числе в сфере педагогической деятельности.	<p>Знает методы решения ключевых задач дисциплины «Кратные интегралы и ряды».</p> <p>Умеет решать практические задачи в области физики и радиофизики с помощью прикладных аспектов математического анализа.</p> <p>Владеет навыками применения аппарата математического анализа для решения задач профессиональной деятельности.</p>	Контрольная работа, практическое задание на экзамене

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	6 ЗЕТ
Часов по учебному плану	216
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	114
- занятия лекционного типа	48
- занятия семинарского типа	64
- текущий контроль (КСРИФ)	2
самостоятельная работа	48
Промежуточная аттестация – экзамен.	54

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Консультации	Всего	
	Очная	Очная	Очная	Очная	Очная	Очная
<b>Тема 1.</b> Дифференциальное исчисление функций многих переменных.	56	16	24	0	40	16
<b>Тема 2.</b> Кратные интегралы.	50	10	20	0	30	20
<b>Тема 3.</b> Числовые, функциональные и степенные ряды.	48	16	20	0	36	12
<b>Тема 4.</b> Ряды Фурье.	6	6	0	0	6	0
<b>КСР</b>	2	0	0	2	2	0
<b>Итоговая аттестация (экзамен)</b>	54	0	0	0	0	0
<b>Итого</b>	216	48	64	2	114	48

Практические занятия организуются, в том числе в форме практической подготовки.

На практических занятиях более подробно изучается программный материал в плоскости отработки практических умений и навыков и усвоения следующих тем:

1. Вычисление частных производных функции многих переменных. Вычисление дифференциалов функций многих переменных. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявно заданных функций. Дифференцирование систем неявно заданных функций и функций, заданных параметрически. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих обыкновенные производные. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих частные производные. Абсолютный экстремум функции многих переменных. Условный экстремум функции многих переменных.
2. Двойные интегралы (расстановка пределов интегрирования). Вычисление двойных интегралов. Переход к полярным координатам в двойных интегралах. Замена переменных в двойных интегралах (общий случай). Приложение двойных интегралов к нахождению площадей и объемов. Тройной интеграл (расстановка пределов интегрирования и вычисление). Замена переменных в тройном интеграле

- (цилиндрические координаты). Замена переменных в тройном интеграле (сферические координаты). Геометрические и механические приложения тройного интеграла.
3. Числовые ряды (сходимость по определению). Необходимое условие сходимости ряда, признаки сравнения. Признаки сходимости знакоположительных рядов (Даламбера, Коши, интегральный). Знакопеременные ряды (Абсолютная и условная сходимость). Нахождение области сходимости функциональных рядов. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов (признак Вейерштрасса). Степенные ряды (нахождение радиуса и интервала сходимости). Разложение функций в степенные ряды. Суммирование степенных рядов.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие знаний, умений и навыков применения аппарата математического анализа для решения задач профессиональной деятельности.

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме проведения контрольной работы и проверки выполнения домашних заданий.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Кратные интегралы и ряды» включает выполнение практических заданий под контролем преподавателя, а также подготовку к контрольной работе и экзамену.

Контрольные вопросы и практические задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

### **5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:**

#### **5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине**

<b>Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)</b>	<b>Шкала оценивания сформированности компетенций</b>						
	<b>плохо</b>	<b>неудовлетворительно</b>	<b>удовлетворительно</b>	<b>хорошо</b>	<b>очень хорошо</b>	<b>отлично</b>	<b>превосходно</b>

<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы творческий подход к решению нестандартных задач.
---------------	--	--	--	---	---	---	---

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Уровень подготовки	
Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1 Вопросы по теории к экзамену по дисциплине «Кратные интегралы и ряды» для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Пространство  $\mathbf{R}^n$ , его основные свойства.
2. Функции многих переменных: область определения, предел, непрерывность.
3. Определение частных производных, примеры вычисления по определению, геометрический смысл.
4. Дифференцируемость функции многих переменных: необходимые условия дифференцируемости; достаточные условия дифференцируемости.
5. Дифференциал первого порядка: вычисление и основные свойства.
6. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
7. Дифференцирование сложной функции одной и нескольких переменных.
8. Производная неявной функции.
9. Уравнения касательной плоскости и нормальной прямой в случаях, когда поверхность задана явно и неявно.
10. Градиент, производная по направлению; их геометрический смысл.
11. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
12. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
13. Экстремум функции двух переменных.
14. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области.
15. Условный экстремум.
16. Замена переменных в дифференциальных выражениях.
17. Задача о массе плоской пластины. Определение двойного интеграла. Геометрический смысл. Классы интегрируемых функций.
18. Свойства двойного интеграла.
19. Вычисление двойного интеграла.
20. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.
21. Вычисление площадей плоских фигур. Площадь в криволинейных координатах.
22. Вычисление объемов тел.
23. Понятие площади поверхности. Вычисление площади поверхности.
24. Задача о массе пространственного тела. Определение тройного интеграла. Геометрический смысл. Классы интегрируемых функций.
25. Свойства тройного интеграла.
26. Вычисление тройного интеграла.
27. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.
28. Вычисление объемов тел. Объем в криволинейных координатах.
29. Физические приложения кратных интегралов: масса, координаты центра тяжести, статические моменты и моменты инерции.
30. Понятие числового ряда и его суммы. Геометрический ряд.
31. Критерии сходимости числового ряда.
32. Необходимое условие сходимости.
33. Признаки сравнения для положительных рядов.
34. Признак Даламбера.
35. Признак Коши радикальный.
36. Интегральный признак.
37. Абсолютная и условная сходимость знакопеременного числового ряда.
38. Признак Лейбница для условной сходимости.
39. Признаки Даламбера и Коши для рядов произвольного знака.
40. Признаки Дирихле и Абеля.



41. Понятие поточечной и равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса для равномерной сходимости.
42. Степенной ряд. Вид области сходимости степенного ряда.
43. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда.
44. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда, ее следствие для степенного ряда.
45. Теорема об интегрировании функционального ряда, ее следствие для степенного ряда.
46. Теорема о дифференцировании функционального ряда, ее следствие для степенного ряда.
47. Ряд Тейлора. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.
48. Приложения рядов Тейлора: приближенное вычисление значений функций, интегралов, нахождение пределов, решение дифференциальных уравнений.
49. Тригонометрические ряды. Теорема о том, что равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье для своей суммы.
50. Разложение в тригонометрический ряд Фурье  $2\pi$  – периодических функций общего вида.
51. Разложение в тригонометрический ряд Фурье  $2\pi$  – периодических четных и нечетных функций.
52. Разложение в тригонометрический ряд Фурье функций произвольного периода.
53. Тригонометрические ряды Фурье на произвольном промежутке.
54. Формулы Дирихле для частичных сумм ряда Фурье.
55. Теорема о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье.
56. Ряды Фурье по произвольной ортогональной системе.
57. Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье.
58. Неравенство Бесселя.
59. Ряды Фурье в комплексной форме.

### 5.2.2. Типовые практические задания для экзамена (для оценки сформированности умений и навыков компетенции ОПК-1)

Пример практических заданий для экзамена по курсу «Кратные интегралы и ряды»

1. Найти  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  и  $d^2 u$ , если  $u = f(x^2 y, x + y^2, x - y)$ ,  $x, y$  – независимые переменные.
2. В интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  перейти к полярным координатам  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  и расставить пределы интегрирования, если  $D$  – часть круга  $x^2 + y^2 \leq 2y, y \geq -x$
3. В интеграле  $\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$  перейти к сферическим и цилиндрическим координатам, если  $G$ - область, ограниченная поверхностями  $x^2 + y^2 = z^2$  и  $x^2 + y^2 = 4z$ .
4. Исследовать на сходимость ряды: а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2}{5 + 2n^2}$ , б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}}$

### 5.2.2. Типовая контрольная работа (для оценки сформированности умений и навыков компетенции ОПК-1)

1. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 1}{5 + 3n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos^2 n}{\sqrt[3]{n}}.$$

2. Исследовать сходимость степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

3. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n\sqrt{n^2 + x}} \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням  $x$  функцию:  $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 1 – М.: Высшая школа, 1988.

В библиотеке ННГУ 370 экз. Ссылка на каталог:

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=364323>

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2 – М.: Высшая школа, 1988.

В библиотеке ННГУ 325 экз. Ссылка на каталог:

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=298122>

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 3 – М.: Высшая школа, 1989.

В библиотеке ННГУ 168 экз. Ссылка на каталог:

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=93050>

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т.1 и т.2. – СПб.: Лань, 2008.

В библиотеке ННГУ 208 экз. Ссылка на каталог:

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=298117>

5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. АСТ.

Астрель, 2003. – 558с.

В библиотеке ННГУ 350 экз. Ссылка на каталог:

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=455736>

6. Галкина С.Ю., Галкин О.Е. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Курс лекций. Электронное учебно-методическое пособие. 2021 г. Нижний Новгород. ННГУ.

Регистрационный номер 1468.17.06. Адрес ресурса в интернете:

[www.unn.ru/books/met\\_files/Diflsch.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/Diflsch.pdf)

в) дополнительная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1, Часть 2 –

М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

В библиотеке ННГУ 55 экз. Ссылка на каталог:

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=31258>

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=389760>

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.

В библиотеке ННГУ 370 экз. Ссылка на каталог:

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=92714>

в) интернет-ресурсы

1. <http://e.lanbook.com/>

2. <http://www.studentlibrary.ru/>

3. <http://www.znanium.com/>

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Для обучения студентов имеются аудитории, оснащенные партами, учебной доской, мобильное место преподавателя (проектор, ноутбук, экран, ПО для презентаций, презентации лекций), а также учебная и научная литература, учебно-методические материалы, представленные в библиотечном фонде и базе электронных изданий университета.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки 03.03.03 Радиофизика, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 7 августа 2020 г. N 912.

Автор \_\_\_\_\_ Минаева О.Н.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ Дубков А.А.

Программа одобрена на заседании методической комиссии радиофизического факультета/института от «25» мая 2023 года, протокол № 04/23.