

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
«30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

Вероятностные модели в естествознании

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

Очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.

Код дисциплины **Б1.В.ДВ.12.04** “Вероятностные модели в естествознании”.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.12.04 “Вероятностные модели в естествознании” относится к части ООП направления подготовки <i>01.03.02 «Прикладная математика и информатика»</i> , формируемой участниками образовательных отношений.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-13. Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	ПК-13.1 Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике	Знать: понятие и основные свойства стохастического интеграла Ито; понятие о процессах Ито; понятие о диффузионном процессе Ито и его производящем дифференциальном операторе	Собеседование
	ПК-13.2 Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований	Знать: основные виды стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) (Ланжевена, Ито и Стратоновича); понятие и основные свойства стохастического интеграла Ито; понятие о процессах Ито; понятие о диффузионном процессе Ито и его производящем дифференциальном операторе	Собеседование
	ПК-13.3 Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности	Уметь: применять формулу Ито для аналитического решения простейших СДУ вычислять аналитически простейшие стохастические интегралы Ито; применять формулу Ито для аналитического решения простейших СДУ	Задача (практическое задание)
	ПК-13.4 Владеет навыками	Владеть: навыками решения простейших СДУ;	Задача (практическое)

	использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований	методами численного моделирования СДУ; навыками применения современных программных средств для численного решения СДУ.	задание)
--	---	---	----------

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	2 ЗЕТ
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	49
- занятия лекционного типа	24
- занятия семинарского типа	24
- занятия лабораторного типа	0
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	23
Промежуточная аттестация – зачет	

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Введение и предварительные сведения из теории вероятностей Стохастические аналоги обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи, приводящие к математическим моделям в виде СДУ (фильтрация, стохастическое управление, финансовая математика и др.). Вероятностное пространство. Случайные переменные. Независимость. Стохастический процесс. Теорема Колмогорова о построении стохастического процесса по конечномерным распределениям. Построение процесса броуновского движения (винеровского процесса) на основе теоремы Колмогорова. Свойства винеровского процесса. Теорема непрерывности Колмогорова. Версии стохастических процессов. Существование непрерывной версии винеровского процесса.	18	6	6		12	6
Интеграл Ито Уравнение Ланжевена и его математическая	18	6	6		12	6

интерпретация. Построение интеграла Ито. Свойство изометрии и другие свойства интеграла Ито. Мартингалы. Непрерывная версия стохастического интеграла. Интеграл Ито как мартингал. Обобщения интеграла Ито. Сравнение интегралов Ито и Стратоновича.						
Процессы Ито и формула Ито Определение процесса Ито. Формула Ито для скалярных процессов. Формула Ито для векторных процессов. Теорема о представлении мартингала.	18	6	6		12	6
Стохастические дифференциальные уравнения и методы их решения Теорема существования и единственности решения СДУ Ито. Слабые и сильные решения СДУ. Некоторые приемы нахождения решения конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито. Численное моделирование винеровского процесса. Решение СДУ методами Эйлера и Рунге – Кутты. Слабые и сильные аппроксимации. Схемы Тейлора различных порядков. Схема Мильштейна. Численная устойчивость и точность методов.	17	6	6		12	5
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация – зачет						
Итого	72	24	24		49	23

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме собеседования по отчетам на практических занятиях и задач (практических заданий).

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

а. Виды самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа обучающихся реализуется в следующих формах: выполнение домашних заданий по дисциплине, составление компьютерных программ, реализующих методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений по индивидуальным заданиям преподавателя. Самостоятельная работа контролируется преподавателем, как во время аудиторных занятий, так и во время внеаудиторной работы, в том числе с использованием консультаций по электронной почте.

Самостоятельная работа обучающихся заключается в ознакомлении с теоретическим материалом (по учебно-методическим пособиям, учебникам и научным работам, указанным в списке литературы). Самостоятельная работа может осуществляться как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях.

Практические работы выполняются в компьютерном классе ПЭВМ по всем разделам дисциплины и включают в себя:

- Практическая работа «Моделирование процесса броуновского движения (винеровского процесса)»;
- Практическая работа «Вычисление стохастических интегралов»;
- Практическая работа «Моделирование процессов Ито»;
- Практическая работа «Моделирование процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями».

б. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

1. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 608

с. [Электронный ресурс] Режим доступа: -

<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113847.html>

2. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. - 2-е изд., исправл. и дополн.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 496 с. - ISBN 5-9221-0254-0.

[Электронный ресурс] Режим доступа:

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/ShaminConform2008ru.pdf>

3. Пухальский А.А. Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 512 с. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922106600.html>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных

	оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	навыки. Имели место грубые ошибки.	задач с некоторыми недочетами.	задач с некоторыми недочетами	задач без ошибок и недочетов.	ошибок и недочетов.	ых задач.
--	--	---	--------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	---------------------	-----------

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Контрольные вопросы

Вопросы	Код формируемой компетенции
1. Стохастические аналоги обыкновенных дифференциальных уравнений.	ПК-13
2. Задачи, приводящие к математическим моделям в виде СДУ (фильтрация, стохастическое управление, финансовая математика и др.).	ПК-13
3. Вероятностное пространство.	ПК-13
4. Случайные переменные.	ПК-13
5. Независимость.	ПК-13
6. Стохастический процесс.	ПК-13
7. Теорема Колмогорова о построении стохастического процесса по конечномерным распределениям.	ПК-13
8. Построение процесса броуновского движения (винеровского процесса) на основе теоремы Колмогорова.	ПК-13
9. Свойства винеровского процесса.	ПК-13
10. Теорема непрерывности Колмогорова.	ПК-13
11. Версии стохастических процессов.	ПК-13
12. Существование непрерывной версии винеровского процесса.	ПК-13
13. Уравнение Ланжевена и его математическая интерпретация.	ПК-13

14.	Построение интеграла Ито.	ПК-13
15.	Свойство изометрии и другие свойства интеграла Ито.	ПК-13
16.	Мартингалы.	ПК-13
17.	Непрерывная версия стохастического интеграла.	ПК-13
18.	Интеграл Ито как мартингал.	ПК-13
19.	Обобщения интеграла Ито.	ПК-13
20.	Сравнение интегралов Ито и Стратоновича.	ПК-13
21.	Определение процесса Ито.	ПК-13
22.	Формула Ито для скалярных процессов.	ПК-13
23.	Формула Ито для векторных процессов.	ПК-13
24.	Теорема о представлении мартингала.	ПК-13
25.	Теорема существования и единственности решения СДУ Ито.	ПК-13
26.	Слабые и сильные решения СДУ.	ПК-13
27.	Некоторые приемы нахождения решения конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито.	ПК-13
28.	Численное моделирование винеровского процесса.	ПК-13
29.	Решение СДУ методами Эйлера и Рунге – Кутты.	ПК-13
30.	Слабые и сильные аппроксимации.	ПК-13
31.	Схемы Тейлора различных порядков.	ПК-13
32.	Схема Мильштейна.	ПК-13
33.	Численная устойчивость и точность методов.	ПК-13

5.2.3. Типовые задачи (практические задания) для оценки сформированности компетенции ПК-13

Задача 1. Пусть B_t – броуновское движение на R , $B_0 = 0$. Положим $E = E^0$.

С помощью разложения в степенной ряд экспонент из обеих частей сравните члены с одинаковыми степенями переменной u и докажите, что

$$E[B_t^4] = 3t^2$$

и что вообще

$$E[B_t^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} t^k, \quad k \in N.$$

Задача 2. Пусть B_t – броуновское движение. Зафиксируем $t_0 \geq 0$. Докажите, что процесс

$$\tilde{B}_t := B_{t_0+t} - B_{t_0}, \quad t \geq 0,$$

является броуновским движением.

Задача 3. Решите двумерное стохастическое дифференциальное

$$dX_1(t) = X_2(t)dt + \alpha dB_1(t),$$

$$dX_2(t) = -X_1(t)dt + \beta dB_2(t),$$

где $(B_1(t), B_2(t))$ – двумерное броуновское движение, а α, β – константы.

Задача 4. Проверьте, что данный процесс (B_t означает одномерное броуновское движение)

$$X_t = \frac{B_t}{1+t}, \quad B_0 = 0,$$

является решением стохастического дифференциального уравнения:

$$dX_t = -\frac{1}{1+t} X_t dt + \frac{1}{1+t} dB_t, \quad X_0 = 0.$$

Задача 5. Найти производящий дифференциальный оператор процесса Ито

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t.$$

Промоделировать процесс в Scilab.

Задача 6. Найти производящий дифференциальный оператор процесса Ито

$$dX_1 = -\frac{1}{2} X_1 dt - X_2 dB_t$$

$$dX_2 = -\frac{1}{2} X_2 dt + X_1 dB_t$$

Промоделировать процесс в Scilab.

5.2.4 Вопросы для собеседования для оценки сформированности компетенции ПК-13:

- 1 Понятие стохастического процесса.
- 2 Построение процесса броуновского движения (винеровского процесса) на основе теоремы Колмогорова).
- 3 Существование непрерывной версии винеровского процесса.
- 4 Интеграл Ито и его свойства.
- 5 Формулы Ито для скалярных и векторных процессов
- 6 Теорема существования и единственности решения СДУ
- 7 Особенности численного решения СДУ

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 608 с. [Электронный ресурс] Режим доступа: - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113847.html>

б) дополнительная литература:

1. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие.- 2-е изд., исправл. и дополн.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 496 с. - ISBN 5-9221-0254-0. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/ShaminConform2008ru.pdf>
2. Пухальский А.А. Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 512 с. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922106600.html>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. YALMIP Wiki <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>
2. Scilab <http://www.scilab.org/>
3. SeDuMi – <https://yalmip.github.io/allsolvers/>.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения:

- операционные системы семейства Microsoft Windows;
- свободно распространяемое бесплатное программное обеспечение (пакет Scilab <http://www.scilab.org>, пакет YALMIP – <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>, решатель SeDuMi – <https://yalmip.github.io/allsolvers/>).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: д.ф.-м.н., профессор кафедры ТВиАД Пакшин П.В.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Заведующий кафедрой ТВиАД: д.ф.-м.н. Зорин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.