

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 12 от 09.11.2022 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Математический анализ

---

Уровень высшего образования  
Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
09.03.02 - Информационные системы и технологии

---

Направленность образовательной программы  
Информационные технологии в системах космической связи

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2022 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.05.01 Математический анализ относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;	ОПК-1.1: Знать основы высшей математики, общей физики, теории вероятности и технологий программирования ОПК-1.2: Уметь решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования ОПК-1.3: Иметь навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знать основные понятия и теоремы дифференциального и интегрального исчисления функций одного и нескольких вещественных переменных; теории числовых и функциональных рядов; их приложения к классическим задачам физики.  ОПК-1.2: Уметь применять математические методы для решения задач физики; использовать адекватный математический аппарат; выполнять математическую обработку результатов экспериментов, выполнять приближенные вычисления и оценивать их погрешность; использовать методы математического моделирования в практической деятельности.  ОПК-1.3: Владеть навыками применения понятий и конструкций математического анализа к решению конкретных задач, методами решения прикладных задач.	Аудиторная контрольная работа Внеаудиторная контрольная работа Задачи	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы

ОПК-8: Способен применять математические модели, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем.	ОПК-8.1: Знать основные методы математического моделирования, классификацию и условия применения моделей, основные методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем, инструментальные средства моделирования и проектирования информационных и автоматизированных систем ОПК-8.2: Уметь применять на практике математические модели, методы и средства проектирования и автоматизации систем на практике ОПК-8.3: Иметь навыки моделирования и проектирования информационных и автоматизированных систем	ОПК-8.1: Знать математические модели физических задач и методы их решения.  ОПК-8.2: Уметь применять методы математического анализа для решения физических задач; выполнять математическую обработку результатов экспериментов.  ОПК-8.3: Владеть навыками построения математической модели физической задачи и методами решения построенной математической модели.	Задачи	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы
---	---	---	--------	---

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>15</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>540</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>160</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>128</b>
- КСР	<b>6</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>138</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>108</b> <b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы	Всего	
	Ф	Ф	Ф	Ф	Ф
Тема 1. Введение в анализ.	17	8	6	14	3
Тема 2. Пределы последовательности и функции. Непрерывность функции.	37	16	12	28	9
Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.	45	20	16	36	9
Тема 4. Интегральное исчисление функций одной переменной.	49	20	20	40	9
Тема 5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.	49	18	14	32	17
Тема 6. Кратные интегралы.	40	14	10	24	16
Тема 7. Криволинейные и поверхностные интегралы.	43	16	10	26	17
Тема 8. Интегралы несобственные и зависящие от параметра.	40	16	8	24	16
Тема 9. Числовые, функциональные и степенные ряды.	52	12	20	32	20
Тема 10. Ряд и интеграл Фурье.	30	10	8	18	12
Тема 11. Преобразование Лапласа.	24	10	4	14	10
Аттестация	108				
КСР	6			6	
Итого	540	160	128	294	138

### Содержание разделов и тем дисциплины

#### Тема 1. Введение в анализ

Предмет математики. Физические явления как источник математических понятий.

Понятие множества, операции с множествами. Функция действительного переменного, область определения и область изменения, способы задания функции. Графики основных элементарных функций (прямая, парабола, кубическая парабола, окружность, гипербола, показательная и логарифмическая функции, тригонометрические функции). Обратные тригонометрические функции и их свойства. Преобразование графиков. Построение графиков с помощью цепочки преобразований. Действия с графиками. График сложной функции. График функции, заданной параметрически. Полярные координаты.

#### Тема 2. Пределы последовательности и функции. Непрерывность функции

Понятие последовательности действительных чисел. Предел последовательности.

Геометрический смысл предела последовательности. Теорема о единственности предела.

Ограниченность сходящейся последовательности. Предельные переходы в равенствах и неравенствах. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной

последовательности, число  $\epsilon$ . Понятие подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности. Вычисление пределов последовательностей.

Предел функции действительного переменного по Коши и по Гейне. Геометрический смысл предела функции действительного переменного. Односторонние пределы. Свойства

пределов функций. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Первый и второй замечательные пределы и следствия из них. Классификация бесконечно малых и бесконечно больших функций. Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции. Вычисление пределов, в частности, применение замены на эквивалентную функцию и метода выделения главной части при вычислении пределов.

Непрерывность функции действительного переменного в точке и на множестве.

Арифметические действия с непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции.

Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Сохранение знака непрерывной функции; существование корня у функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков; теорема о промежуточных значениях. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции и о достижении непрерывной функции на отрезке своих точных верхней и нижней граней. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Производные и односторонние производные, бесконечные производные.

Геометрический и физический смысл производной. Правила дифференцирования и таблица производных. Дифференциал и его геометрический смысл. Производная сложной функции.

Логарифмическое дифференцирование, производная степенно-показательной функции.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Инвариантность формы первого и неинвариантность формы высших дифференциалов. Параметрически заданные функции и их дифференцирование. Производная функции, заданной неявно.

Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора и формула

Маклорена. Разложения по формуле Маклорена основных элементарных функций.

Приложения формулы Тейлора. Признаки монотонности функции на промежутке.

Экстремумы и правила их нахождения. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Асимптоты.

Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению графиков.

Кривые на плоскости и в пространстве: понятие длины кривой, натуральный параметр, достаточное условие спрямляемости кривой, кривизна кривой, радиус и центр кривизны.

Тема 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Техника интегрирования (непосредственное интегрирование с помощью таблиц, метод разложения, замена переменной, интегрирование по частям, приведение квадратного трехчлена к каноническому виду). Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители. Представление правильной рациональной дроби в виде суммы простейших рациональных дробей. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций. Сведение интегралов от иррациональных и тригонометрических функций к интегрированию рациональных функций.

Определенный интеграл. Условие существования определенного интеграла. Классы интегрируемых функций. Свойства определенного интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Приложение определенного интеграла к вычислению длин дуг, площадей плоских фигур, объемов и площадей поверхности тел вращения.

Тема 5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Понятие функции двух переменных, ее геометрическое изображение. Функции трех и более переменных. Понятие  $n$ -мерного арифметического пространства, евклидова пространства, норма, метрика, скалярное произведение.

Предел и непрерывность. Двойные и повторные пределы. Дифференциальное

исчисление функций многих переменных. Частные производные. Дифференцируемость функции многих переменных. Необходимые условия дифференцируемости. Достаточные условия дифференцируемости функции многих переменных. Производная сложной функции. Дифференциал функции многих переменных, применение дифференциалов к приближенным вычислениям. Производная по направлению. Градиент. Связь производной по направлению с градиентом. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Геометрический смысл дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Равенство смешанных производных. Формула Тейлора. Экстремум.

Неявные функции. Теоремы о существовании неявной функции. Функциональные определители. Существование системы неявных функций. Условный экстремум. Правило множителей Лагранжа. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

#### Тема 6. Кратные интегралы

Определение двойного интеграла. Классы интегрируемых функций. Свойства двойного интеграла. Приведение двойного интеграла к повторному. Криволинейные координаты на плоскости. Полярные и эллиптические координаты. Замена переменных в двойном интеграле. Тройной интеграл. Сведение тройного интеграла к повторному. Замена переменных в тройном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты.

Мера Жордана. Измеримые множества. Необходимое и достаточное условие измеримости множества на плоскости. Приложения двойных и тройных интегралов: вычисление площади плоской фигуры, объема тела, площади поверхности, массы, координат центра масс, статических моментов и моментов инерции.

#### Тема 7. Криволинейные и поверхностные интегралы

Определение криволинейных интегралов. Основные формулы вычисления криволинейных интегралов. Циркуляция вектора. Вычисление работы силы. Формула Грина. Вычисление площади с помощью криволинейных интегралов. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Определения поверхностных интегралов первого и второго рода. Вычисление поверхностных интегралов. Поток вектора через поверхность. Скалярные и векторные поля. Теорема Гаусса-Остроградского, ее векторная форма. Дивергенция векторного поля и ее инвариантное определение. Теорема Стокса и ее векторная форма. Ротор и его инвариантное определение.

#### Тема 8. Интегралы несобственные и зависящие от параметра

Определение несобственных интегралов первого и второго рода. Эталонные интегралы. Свойства сходящихся интегралов. Критерии сходимости несобственных интегралов. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов. Мажорантный признак сравнения. Предельный признак сравнения. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признак Абеля. Признак Дирихле. Расширение методов интегрирования на несобственные интегралы. Замена переменных. Интегрирование по частям. Главное значение несобственного интеграла. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру. Несобственные интегралы от параметра. Интегралы Эйлера первого и второго рода. Вычисление интегралов с помощью Бета- и Гамма-функций.

#### Тема 9. Числовые, функциональные и степенные ряды

Числовые ряды. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерии сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости. Достаточные признаки сходимости: мажорантный и предельный признаки сравнения, Даламбера, Коши, интегральный, Дирихле, Абеля. Абсолютная и условная сходимость. Умножение рядов. Перестановка членов ряда. Функциональные последовательности и ряды функций. Поточечная и равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов. Степенной ряд. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Дифференцирование и

интегрирование степенного ряда внутри области сходимости. Ряд Тейлора и Маклорена. Стандартные разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена. Приближенные вычисления с помощью рядов значений функций, интегралов, решение алгебраических и дифференциальных уравнений.

Тема 10. Ряд и интеграл Фурье.

Постановка задачи. Гильбертово пространство. Скалярное произведение и норма функции. Поточечная, равномерная сходимость и сходимость в среднем последовательностей и рядов. Ортогональные и ортонормированные элементы пространства со скалярным произведением. Ряд Фурье по ортогональной и ортонормированной системам функций.

Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Условие сходимости ряда Фурье. Равенство Парсеваля. Замкнутые и полные ортогональные системы элементов в пространстве со скалярным произведением. Тригонометрический ряд Фурье для  $2\pi$  - периодических функций. Разложение четной и нечетной функции в тригонометрический ряд Фурье. Тригонометрический ряд Фурье для функций произвольного периода.

Комплексная форма ряда Фурье. Поточечная и равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Полнота тригонометрической системы функций.

Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. Достаточные признаки сходимости интеграла Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Представление четной и нечетной функции интегралом Фурье. Комплексное прямое и обратное преобразования Фурье. Синус-преобразования Фурье и косинус-преобразования Фурье.

Тема 11. Преобразование Лапласа.

Оригиналы и их изображения, теоремы существования и единственности, свойства оператора Лапласа. Изображения единичного скачка, показательной, тригонометрических, гиперболических, степенной функций. Теоремы подобия, сдвига, запаздывания, свертывания оригиналов. Дифференцирование и интегрирование оригиналов. Сводная таблица оригиналов и их изображений.

Приложения преобразования Лапласа к интегрированию ЛДУ и систем ЛДУ с постоянными коэффициентами, вычислению несобственных интегралов, решению интегральных уравнений и некоторых задач математической физики

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Математический анализ» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий, выполнение домашних самостоятельных работ, подготовку к самостоятельным и контрольным работам, экзамену.

Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам, указанным в списке литературы, решении практических задач, подготовке ответов на вопросы самоконтроля. Самостоятельная работа может происходить как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях.

Самостоятельная работа под контролем преподавателя направлена на активизацию познавательной деятельности студента и установление «обратной связи» между студентом и преподавателем.

В данной программе разработаны задания по конкретным темам дисциплины,

позволяющие студентам глубже изучить данный раздел программы, способствующие воспитанию у них способности принимать самостоятельные решения. Для проведения текущего контроля сформированности компетенции используются аудиторные самостоятельные и контрольные работы, домашние самостоятельные работы. Приведены задания для контрольных и самостоятельных работ, отчетов по темам дисциплины. Изучение теоретического материала определяется рабочей учебной программой дисциплины, календарным планом изучения дисциплины и перечнем литературы. При подготовке к занятиям рекомендуется повторить материал предшествующих тем рабочего учебного плана, а также материал предшествующих учебных дисциплин, который служит базой изучаемого раздела данной дисциплины. При подготовке к практическому занятию необходимо изучить материалы лекции, рекомендованную литературу. Изученный материал следует проанализировать в соответствии с планом занятия, затем проверить степень усвоения содержания вопросов.

Практические занятия неразрывно связаны с домашними заданиями как основным видом текущей самостоятельной работы, являясь, в сочетании с систематическим изучением теоретического материала, основой рейтинговой оценки знаний, фиксируемой в промежуточной и итоговой аттестациях.

Самостоятельная работа проводится с целью углубления знаний по дисциплине и предусматривает:

- повторение пройденного учебного материала, чтение рекомендованной литературы;
- подготовку к практическим занятиям;
- выполнение общих и индивидуальных домашних заданий;
- работу с электронными источниками;
- подготовку к сдаче экзамена.

Планирование времени на самостоятельную работу важно осуществлять на весь семестр, предусматривая при этом повторение пройденного материала.

При подготовке к экзамену следует руководствоваться перечнем вопросов для подготовки к итоговому контролю по курсу. При этом необходимо уяснить суть основных понятий дисциплины.

Самостоятельная работа студентов, прежде всего, заключается в изучении литературы, дополняющей материал, излагаемый в лекционной части курса. Необходимо овладеть навыками библиографического поиска, в том числе в сетевых Интернет-ресурсах.

Существует несколько методов работы с литературой.

Один из них – метод повторения: смысл прочитанного текста можно заучить наизусть.

Простое повторение воздействует на память механически и поверхностно. Полученные таким путем сведения легко забываются.

Наиболее эффективный метод – метод осознанного запоминания: прочитанный текст нужно подвергнуть большей, чем простое заучивание, обработке. Чтобы основательно обработать информацию, важно произвести целый ряд мыслительных операций: прокомментировать новые данные; оценить их значение; поставить вопросы; сопоставить полученные сведения с ранее известными.

Для улучшения обработки информации очень важно устанавливать осмысленные связи, структурировать новые сведения. Изучение научной, учебной и иной литературы требует ведения рабочих записей. Форма записей может быть весьма разнообразной: простой или развернутый план, тезисы, цитаты, конспект.



## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

#### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Контрольная работа по теме «Предел числовой последовательности и функции. Непрерывность функции»

1. Записать определение предела функции по Коши, нарисовать график функции, удовлетворяющей условию:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$ .
2. Построить график функции, для которой одновременно выполняются условия:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
3. Вычислить пределы: а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{2}{n}}{e^{\frac{2n+1}{n}} - 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{5x+4}}{x^4 - 4x^2 + 3}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{tg 2x}$ .
4. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, установить их характер. Построить график функции.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x, & x < -1 \\ 2x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$$

Контрольная работа по теме «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

1. Вычислить производную функции  $z = \sin xy$  в точке  $(1; 0)$  по направлению к точке  $(-1; 3)$ .
2. Вычислить  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 y}{\sqrt{1-x^2 y} - 1}$ .
3. Вычислить  $du$  и  $d^2u$  функции  $u = f(x^3 - y^4)$ .
4. Найти точки экстремума функции  $u = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$ .
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = 2x^2 - 2y^2$  на множестве  $D: x^2 + y^2 \leq 9$ .

Контрольная работа по теме «Функциональные ряды и их приложения»

1. Найдите область сходимости функционального ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3x+2}{n(n+1)x^n}$ .
2. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда и исследуйте поведение ряда на концах интервала сходимости  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n+1}}$ .
3. Докажите равномерную сходимость функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^{n-1}}$ ,  $x \in [0; 1]$ .
4. Разложите функцию  $y = 1 + \frac{x^2}{e^{-2x}}$  в ряд Маклорена и укажите, для каких значений  $x$  справедливо разложение.

5. Разложите функцию  $y = \sqrt{x^3}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x=1$  и укажите, для каких значений  $x$  справедливо разложение.

6. Найти сумму степенного ряда  $\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \dots$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Студент получил верный ответ во всех заданиях. При этом студент продемонстрировал знание дополнительного материала.
отлично	Студент получил верный ответ во всех заданиях.
очень хорошо	Студент получил верный ответ в большинстве заданий.
хорошо	Студент решил большую часть задач с незначительными недочетами.
удовлетворительно	Студент решил большую часть задач с существенными недочетами.
неудовлетворительно	Студент допускает грубые ошибки в решении стандартных задач.
плохо	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач.

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Внеаудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Домашняя самостоятельная работа по теме «Приложения определенного интеграла»

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = |\log_a x|$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{1}{a}$ ,  $x = a$ ,  $a > 1$ .
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $(x^2 + y^2)^3 = a^2(y^2 - x^2)^2$ .
3. Вычислить длину дуги кривой  $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}$  от точки с абсциссой  $x = 0$  до точки с абсциссой  $x = 2\sqrt{3}$ .
4. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = a \sin 2t, \\ y = 2a \cos^2 t. \end{cases}$
5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 1 - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ , вокруг оси  $Ox$ .
6. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линией  $x^2 + y^2 = R^2$ , вокруг оси  $Ox$ .

Домашняя самостоятельная работа по теме «Поверхностные интегралы»

Вычислить поверхностные интегралы:

- а)  $\iint_S xz \, dq$ , где  $S$  – часть цилиндрической поверхности  $y - x^2 + 4 = 0$ , отсеченная плоскостью  $y = 0$  и заключенная между плоскостями  $z = 0, z = 2$ .
- б)  $\iint_S xz \, dx \, dy + x^2 \, dy \, dz - 4 \, dz \, dx$ , где  $S$  – верхняя сторона ограниченной части плоскости  $x - 2y + 4z - 8 = 0$ , отсеченной координатными плоскостями.

**Критерии оценивания (оценочное средство - Внеаудиторная контрольная работа)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Студент получил верный ответ во всех заданиях. При этом студент продемонстрировал знание дополнительного материала.
отлично	Студент получил верный ответ во всех заданиях.
очень хорошо	Студент получил верный ответ в большинстве заданий.
хорошо	Студент решил большую часть задач с незначительными недочетами.
удовлетворительно	Студент решил большую часть задач с существенными недочетами.
неудовлетворительно	Студент допускает грубые ошибки в решении стандартных задач.
плохо	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач.

**5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:**

- Задача 1. Вычислить производные: а)  $y = e^{2x} \cdot \cos(3x+1)$ ; б)  $y = \frac{4 \arccos x}{\operatorname{tg} x - 2x}$ ;  
 в)  $y = \ln \frac{5x-3}{2x+7}$ ; д)  $y = \sqrt[3]{2^{4-x}}$ .
- Задача 2. Вычислите вторую производную функции  $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$ .
- Задача 3. Вычислите пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2-x}$ .
- Задача 4. Вычислить интегралы: а)  $\int \frac{\sqrt{x^5} + 4x^4 \cdot 3^x + x^3}{x^4} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$ ;  
 в)  $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$ .

- Задача 5. Вычислить интегралы: а)  $\int (3x+1) \cdot \cos 2x dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ ;  
 в)  $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+5} dx$ .
- Задача 6. Вычислить интегралы: а)  $\int_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x} dx$ ; б)  $\int_4^5 x \cdot \sqrt{x^2-16} dx$ ;  
 в)  $\int_0^1 x^3 \cdot \arctg x dx$ .
- Задача 7. Вычислить двойные интегралы: а)  $\iint_D (x-y) dx dy$ , где  $D$  ограничена линиями  $x=0, y=0, x+y=2$ ; б)  $\iint_D (x^2+y^2-2) dx dy$ ,  $D: x^2+(y+2)^2 \leq 4$ .

- Задача 8. Вычислить криволинейные интегралы: а)  $\int_{AB} (x\sqrt{x} + 3y) dx$ , где  $AB$ :  
 $y = \sqrt{x}; A(0; 0), B(1; 1)$ ; б)  $\int_{AB} x \cdot \sqrt[3]{y} dx - 6x^3 dy$ , где  $AB$ :  $y = x^3; A(0; 0), B(2; 8)$ .
- Задача 9. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость  
 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ .
- Задача 10. Исследовать сходимость несобственного интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{x \sin x}$ .
- Задача 11. Исследуйте ряды на сходимость и установите характер сходимости:  
 а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{5^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ ; д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ .
- Задача 12. Найти сумму ряда: а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$ ; б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{3^{n-2}}$ .

#### 5.1.4 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-8:

- Задача 1. Вычислить координаты центра тяжести фигуры (меньшей части), ограниченной линиями  $x^2 + 4y^2 = 1, -x + 2y = 1$  (поверхностную плотность фигуры считать равной единице) с помощью определенного интеграла.
- Задача 2. Вычислить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = x+1; y^2 = -\frac{1}{2}x+1$ , с помощью двойного интеграла (поверхностную плотность считать равной единице).

Задача 3. Найти массу тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $64(x^2+y^2)=z^2$ ,  $x^2+y^2=4$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  ( $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ) с плотностью  $\rho = \frac{5(x^2+y^2)}{4}$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Выполнены все или большая часть этапов решения задачи или задача решена с незначительными недочетами. Результаты работы представлены преподавателю в срок.
не зачтено	Выполнены не все практические задания или выполнены не в полном объеме (представлено не полное описание этапов выполнения заданий, получен неверный ответ, результаты работы не представлены преподавателю).

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

			объеме	некоторые с недочетами	недочетами	и, выполнены все задания в полном объеме	
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1**



- Задание 1. Вычислить предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2} \right)^{\frac{x}{\ln(2x-1)}}$ .
- Задание 2. Доказать, что не существует предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ .
- Задание 3. Исследовать функцию  $y = \begin{cases} 3x & \text{при } x < 0 \\ x^2 - x & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ -x + 2 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$  на непрерывность, указать вид точек разрыва.

- Задание 4. Исследовать на монотонность функцию  $y = x + \cos x$ .
- Задание 5. Найдите точки экстремума функции  $y = (x+2)^3 \sqrt{x-2}$ .
- Задание 6. Исследовать функцию на выпуклость и найти точки перегиба:  $y = \frac{\ln x}{x^2}$ .
- Задание 7. Найти асимптоты графика функции  $y = \ln \frac{1+x}{2-x}$ .
- Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \frac{x}{2+x^3}$  на отрезке  $[0; 3]$ .
- Задание 9. Докажите тождество  $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$  при  $x \in [-1; 1]$ .
- Задание 10. Вычислите  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$ .
- Задание 11. Вычислите  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$ .

- Задание 12. Исследовать функцию  $z = x^3 y^2 (12 - x - y)$  на экстремум.
- Задание 13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 y (4 - x - y)$  в треугольнике  $x + y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$ .
- Задание 14. Функцию  $z = 1 - x - y$  методом Лагранжа исследовать на экстремум при условии  $x^2 + y^2 = 1$ .
- Задание 15. Преобразовать выражение  $x^2 y' - 4xy' + y$  к новой независимой переменной, полагая  $x = e^z$ .
- Задание 16. Вычислить  $\iint_D (24xy - 48x^3 y^3) dx dy$ , где  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^2, y = -\sqrt{x}$ .
- Задание 17. Преобразовать к полярным координатам и вычислить двойной интеграл  $\iint_D xy^2 dx dy$ , где  $D$  ограничена кривыми  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  и  $x^2 + y^2 = 4y$ .
- Задание 18. Расставить пределы интегрирования в декартовых и цилиндрических координатах в  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ , если  $V: \{2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ .

- Задание 19. Можно ли и где почленно дифференцировать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$ ? Найти сумму этого ряда.
- Задание 20. Можно ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$  почленно интегрировать по  $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ ? Записать в виде ряда  $\int_0^{\frac{1}{3}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \right) dx$ .
- Задание 21. Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ .
- Задание 22. Используя основные разложения, разложить в степенной ряд функцию  $f(x) = \frac{x}{1+x} + \ln(1-x)$ .
- Задание 23. Разложить функцию  $f(x) = \sqrt{x}$  в ряд по степеням  $(x-1)$ , используя основные разложения.

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-8

Задание 1. Вычислить приближённое значение  $\alpha = 1,94^2 e^{0,12}$  с помощью дифференциала.

Задание 2. Найти координаты центра масс круглой пластинки,  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , если плотность её в точке  $M(x, y)$  пропорциональна расстоянию от точки  $M$  до точки  $A(a, 0)$ .

Задание 3. Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластины, ограниченной кривой  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

Задание 4. Используя разложение функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$  в ряд, найти  $f^{(3)}(0)$ .

Задание 5. Пользуясь разложением функций в ряд Тейлора вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4} \right)$ .

Задание 6. Вычислить  $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$  с точностью до 0,001.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	задача верно решена, каждый переход обоснован ссылкой на соответствующее утверждение, приведены верные формулировки утверждений, обосновывающие решение задачи
отлично	задача верно решена, каждый переход обоснован ссылкой на соответствующее утверждение, приведены формулировки утверждений с несущественными недочетами, обосновывающие решение задачи
очень хорошо	задача верно решена, почти все переходы обоснованы ссылкой на соответствующее утверждение, приведены формулировки утверждений с несущественными недочетами, обосновывающие решение задачи
хорошо	задача решена с незначительными недочетами, почти все переходы обоснованы ссылкой на соответствующее утверждение, приведены формулировки утверждений с несущественными недочетами, обосновывающие решение задачи
удовлетворительно	задача решена с незначительными недочетами, но обоснование переходов вызывает затруднения
неудовлетворительно	задача решена с грубыми ошибками
плохо	задача не решена



### 5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1 семестр

1. Множества. Действия над множествами. Числовые множества и их свойства. Промежутки в  $\mathbf{R}$ .
2. Модуль действительного числа и его свойства.
3. Ограниченные и неограниченные множества. Понятие точных верхней и нижней граней числового множества
4. Понятие функции, способы задания функций. Обратная функция, примеры.
5. Элементарные свойства функций: монотонность, периодичность, симметрия.
6. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Геометрическая интерпретация предела. Монотонность и ограниченность числовой последовательности.
7. Свойства предела числовой последовательности.
8. Бесконечно малые числовые последовательности и их свойства.
9. Свойства сходящихся последовательностей.
10. Связь между сходимостью и ограниченностью числовой последовательности. Теоремы Вейерштрасса и Больцано-Вейерштрасса.
11. Сходимость/расходимость числовой последовательности. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
12. Число  $e$ .
13. Понятие неопределенности. Виды неопределенностей. Раскрытие неопределенностей.
14. Определение Гейне предела функции в точке. Определение Коши предела функции в точке. Различные случаи и их геометрическая интерпретация. Эквивалентность определений.
15. Односторонние пределы. Критерий существования предела функции в точке.
16. Свойства предела функции.
17. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Неопределенности.
18. Первый и второй замечательные пределы. Полезные пределы.
19. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Эквивалентные бесконечно малые. Замена функции эквивалентной под знаком предела. Главная часть функции.

20. Непрерывность функции в точке и на множестве. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность.
21. Предел и непрерывность степенно-показательной функции.
22. Свойства функций непрерывных на отрезке.
23. Основные элементарные функции. Непрерывность основных элементарных функций.
24. Элементарные функции. Непрерывность элементарных функций.
25. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.
26. Определение производной функции в точке. Примеры вычисления производной по определению (производная постоянной, степенной функции с натуральным показателем, синуса, косинуса, показательной функции).
27. Односторонние производные функции в точке. Критерий существования конечной производной функции в точке. Необходимое условие существования производной.
28. Производная суммы, разности, произведения и частного. Постоянный множитель под знаком производной. Производная тангенса и котангенса. Производная гиперболических функций.
29. Производная обратной функции. Производная логарифмической и обратных тригонометрических функций.
30. Таблица производных.
31. Геометрический и физический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к кривой.
32. Производная сложной функции. Производная степенной функции с произвольным показателем и степенно-показательной функции. Формула логарифмического дифференцирования.
33. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал. Теорема о связи производной и дифференциала. Геометрический и физический смысл дифференциала.
34. Дифференциал суммы, разности, произведения и частного. Постоянный множитель под знаком дифференциала.
35. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
36. Производные высших порядков. Правила вычисления производных высших порядков. Формула Лейбница. Производная порядка  $n$  синуса и косинуса.
37. Дифференциалы высших порядков и их свойства. Обладает ли дифференциал второго порядка свойством инвариантности?
38. Производная параметрически заданной функции.
39. Производная функции, заданной неявно.

40. Теорема Ферма, ее геометрическая и физическая интерпретации. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши, их геометрическая интерпретация.
41. Правило Лопиталя. Применение правила Лопиталя для раскрытия различных видов неопределенностей.
42. Формула Тейлора и Маклорена для многочленов. Формула Тейлора и Маклорена для произвольной функции с остаточным членом в форме Пеано, Лагранжа Коши, Шлемильха-Роша.
43. Многочлен Тейлора как многочлен наилучшего приближения. Формула Маклорена для основных элементарных функций.
44. Условия постоянства функции на промежутке.
45. Определение функции, монотонной на промежутке. Критерии строгой и нестрогой монотонности.
46. Определение точки локального экстремума. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.
47. Определение выпуклости функции на промежутке. Критерии выпуклости.
48. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия точки перегиба.
49. Асимптоты вертикальные, наклонные и горизонтальные.
50. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции.
51. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства первообразной и неопределенного интеграла.
52. Таблица интегралов.
53. Замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
54. Правило интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Примеры.
55. Комплексные числа, действия над ними. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел.
56. Разложение многочленов на множители.
57. Рациональные функции. Правильные и неправильные дроби. Выделение целой части для неправильной дроби.
58. Простейшие рациональные дроби. Разложение правильной дроби на простейшие.
59. Интегрирование простейших рациональных дробей (4 типа).
60. Алгоритм вычисления неопределенного интеграла от рациональной функции. Методы нахождения неопределенных коэффициентов.

61. Интегрирование иррациональных функций.
62. Подстановки Эйлера.
63. Интегрирование дифференциального бинома.
64. Вычисление интегралов от тригонометрических функций.
65. Понятие о неберущихся интегралах. Основные примеры неберущихся интегралов. Эллиптические интегралы.
66. Понятие определенного интеграла Римана. Геометрический и физический смысл определенного интеграла. Простейшие свойства определенного интеграла.
67. Необходимое условие интегрируемости функции по Риману.
68. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства. Геометрический смысл сумм Дарбу. Критерий интегрируемости функции по Риману.
69. Достаточные условия интегрируемости по Риману.
70. Свойства определенного интеграла.
71. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.
72. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.
73. Замена переменной в определенном интеграле.
74. Понятие площади плоской фигуры. Критерий квадратуемости фигуры. Теорема о площади криволинейной трапеции.
75. Площадь фигуры в декартовых координатах и в случае параметрического задания функции.
76. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.
77. Понятие кривой. Основные определения. Понятие спрямляемой кривой. Длина кривой. Достаточное условие спрямляемости кривой.
78. Длина дуги кривой, заданной параметрически, в декартовых координатах. Длина дуги в полярных координатах.
79. Понятие объема фигуры. Критерий кубируемости фигуры.
80. Объем тела через площадь поперечного сечения. Объем тела вращения.
81. Площадь поверхности тела вращения.
82. Теоремы Паппа-Гульдина.

1. Понятие метрического пространства. Пространство  $\mathbf{R}^n$ . Сферические и прямоугольные окрестности в пространстве  $\mathbf{R}^n$ .
2. Последовательности в пространстве  $\mathbf{R}^n$ , сходимость последовательности в пространстве  $\mathbf{R}^n$ , свойства сходящихся последовательностей.
3. Некоторые типы точек и множеств в пространстве  $\mathbf{R}^n$ .
4. Функция 2-х переменных. Область определения и множество значений. График и линии уровня функций двух переменных. Функция 3-х переменных, поверхность уровня.
5. Предел функции  $n$  переменных. Связь двойного и повторного пределов. Примеры.
6. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и на множестве. Арифметические действия над непрерывными функциями. Сложная функция. Непрерывность сложной функции.
7. Свойства функции, непрерывной на множестве (обобщение теорем Вейерштрасса и Коши).
8. Частные производные. Связь между непрерывностью функции и существованием частных производных. Дифференцируемость и дифференциал функции нескольких переменных. Необходимые условия дифференцируемости. Связь между дифференцируемостью функции и существованием частных производных. Достаточное условие существования дифференциала.
9. Дифференцирование сложной функции. Цепное правило. Инвариантность формы 1 дифференциала. Дифференциал суммы, разности, произведения, частного.
10. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Вычисление дифференциала второго порядка сложной функции.
11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала. Производная по направлению. Градиент.
12. Формула Тейлора для функции двух переменных.
13. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции.
14. неявная функция одного переменного. Теорема о существовании неявной функции одного переменного (без доказательства). Вычисление производных неявной функции одного переменного.
15. неявная функция двух переменных. Теорема о существовании неявной функции двух переменных (без доказательства). Вычисление частных производных неявной функции двух переменных.
16. неявные функции, определяемые системой уравнений. Якобиан.
17. Условный экстремум функции нескольких переменных. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
18. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

19. Задачи, приводящие к понятию двойного и тройного интегралов. Двойные и тройные интегралы. Определение. Теорема существования.
20. Свойства двойных и тройных интегралов.
21. Вычисление двойного интеграла: сведение двойного интеграла к повторному.
22. Криволинейные координаты на плоскости. Выражение площади в криволинейных координатах. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
23. Вычисление тройных интегралов.
24. Криволинейные координаты в пространстве. Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.
25. Геометрические приложения двойных и тройных интегралов: вычисление площади плоской фигуры, вычисление объемов тел, вычисление площади поверхности.
26. Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла первого рода. Криволинейные интегралы первого рода: определение, теорема существования (без доказательства), свойства. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.
27. Криволинейные интегралы второго рода: определение, теорема существования (без доказательства), свойства. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.
28. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Вычисление работы плоского силового поля.
29. Формула Грина. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла.
30. Поверхностные интегралы первого рода: определение, теорема существования (без доказательства), свойства. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.
31. Поверхностные интегралы второго рода: определение, теорема существования (без доказательства), свойства. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.
32. Формула Остроградского-Гаусса.
33. Формула Стокса.
34. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Полный дифференциал. Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Плоский случай.
35. Несобственные интегралы первого рода: определение, сходимость и расходимость, главное значение, аналог формулы Ньютона-Лейбница. Свойства несобственных интегралов первого рода. Особые точки несобственного интеграла первого рода.
36. Теоремы сравнения для несобственных интегралов первого рода.
37. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла первого рода. Теорема Коши о связи абсолютной сходимости и сходимости несобственного интеграла первого рода.

38. Несобственные интегралы второго рода: определение, сходимость и расходимость, главное значение, аналог формулы Ньютона-Лейбница. Свойства несобственных интегралов второго рода. Особые точки несобственного интеграла второго рода.
39. Теоремы сравнения для несобственных интегралов первого рода.
40. Первый и второй признаки сходимости для несобственных интегралов (без доказательства).
41. Определенные интегралы, зависящие от параметра. Свойства определенных интегралов, зависящих от параметра: непрерывность, дифференцирование по параметру, интегрирование по параметру.
42. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Сходимость и равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.
43. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра: непрерывность, интегрирование по параметру, дифференцирование по параметру.
44. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра (без доказательства).
45. Гамма-функция: определение, сходимость и равномерная сходимость. Свойства Гамма-функции.
46. Бета-функция: определение, сходимость и равномерная сходимость. Свойства Гамма-функции.
47. Связь между Бета и Гамма-функциями.
48. Формула дополнения, формула удвоения, формула Стирлинга (без доказательства).

### 3 семестр

1. Числовой ряд. Сходимость и расходимость числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости.
2. Геометрический и обобщенный гармонический ряды и их сходимость.
3. Остаток ряда. Связь между сходимостью числового ряда и сходимостью его остатка. Теорема о пределе остатков сходящегося числового ряда.
4. Ряды с неотрицательными членами. Теоремы сравнения.
5. Признаки Даламбера и Коши сходимости знакоположительных рядов.
6. Интегральный признак сходимости знакоположительных рядов.
7. Знакопередающие ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка сходящегося знакопередающего ряда.
8. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Теорема Коши о сходимости абсолютно сходящегося ряда.

9. Условно сходящиеся ряды. Теорема Римана.
10. Функциональные ряды. Частичная сумма и сумма функционального ряда. Сходимость, область сходимости функционального ряда.
11. Равномерно сходящиеся функциональные ряды, связь между сходимостью и равномерной сходимостью функционального ряда.
12. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
13. Свойства равномерно сходящихся рядов. Непрерывность суммы ряда. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании равномерно сходящегося функционального ряда.
14. Степенной ряд. Первая теорема Абеля. Радиус сходимости. Интервал сходимости. Промежутки сходимости.
15. Теорема об абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля.
16. Формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.
17. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
18. Выражение коэффициентов степенного ряда через значения суммы этого ряда и ее производных в центре ряда. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд.
19. Формальный ряд Тейлора. Понятие аналитической в точке функции. Разложение аналитической функции в степенной ряд. Критерий аналитичности функции.
20. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.
21. Разложение в ряд Тейлора показательной функции  $e^x$ , тригонометрических функций  $\cos x$ ,  $\sin x$ , натурального логарифма  $\ln(1+x)$ , биномиальный ряд. Разложение в ряд Тейлора других элементарных функций.
22. Понятие о действиях над степенными рядами: умножение степенных рядов, деление степенных рядов, подстановка ряда в ряд.
23. Ортогональные и ортонормированные системы функций. Ортогональность тригонометрической системы функций на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .
24. Нормировка системы функций. Разложение по ортонормированной системе функций. Коэффициенты Фурье.
25. Нормировка тригонометрической системы функций. Определение тригонометрического ряда Фурье. Коэффициенты Фурье.
26. Понятие кусочно-гладкой функции, заданной на отрезке. Точки разрыва первого рода. Разложение кусочно – гладких  $2\pi$ -периодических функций в тригонометрические ряды Фурье. Формулировка принципа локализации.



27. Представление непериодической функции рядом Фурье.
28. Ряды Фурье для четных (нечетных) функций. Разложение функций, заданных на отрезке  $[0, \pi]$ , в ряд по косинусам или синусам.
29. Тригонометрические ряды Фурье в случае произвольного интервала.
30. Сходимость рядов Фурье в «среднем». Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортогональной системы функций. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость тригонометрической системы функций.
31. Интеграл Фурье. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций. Интеграл Фурье для функций, заданных на промежутке  $[0, +\infty)$ . Преобразования Фурье, формулы обращения.
32. Оригиналы и изображения, теоремы существования и единственности, изображение единичного скачка, показательной, степенной, тригонометрических и гиперболических функций.
33. Теоремы подобия, смещения, запаздывания, свертывания оригиналов. Дифференцирование и интегрирование оригиналов.
34. Таблица оригиналов и их изображений.

#### **5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-8**

1 семестр

1. Метод математической индукции, вывод формул общего члена и суммы арифметической и геометрической прогрессий. Бином Ньютона.
2. Применение дифференциала для приближенного вычисления значения функции в точке.
3. Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям и вычислению пределов.
4. Схема исследования функции и построения ее графика.
5. Общая схема приложений определенного интеграла.
6. Вычисление массы плоской кривой, статических моментов и координат центров тяжести кривой.
7. Вычисление статических моментов и координат центра тяжести однородной плоской фигуры.

2 семестр

1. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
2. Физические приложения двойных и тройных интегралов: вычисление массы, координат центра тяжести, статических моментов тела в пространстве и плоской пластинки, моментов инерции тела в пространстве и плоской пластинки относительно объекта.
3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.

4. Физические приложения поверхностных интегралов первого рода.
5. Поток вектора через поверхность.
6. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского в векторной форме. Физический смысл дивергенции. Соленоидальные поля. Производительность векторной трубки.
7. Циркуляция вектора вдоль кривой. Ротор вектора. Теорема Стокса в векторной форме. Потенциальные поля.
8. Потенциально-соленоидальные поля в плоском случае.
9. Вычисление несобственных интегралов с помощью предварительного дифференцирования по параметру.
10. Вычисление интегралов с помощью Вета и Гамма-функций.

3 семестр

1. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов, оценка погрешности в случае знакочередующегося и знакоположительного ряда. Другие приложения степенных рядов.
2. Применение преобразования Лапласа к интегрированию ЛДУ и систем ЛДУ с постоянными коэффициентами, вычислению несобственных интегралов, решению интегральных уравнений, некоторых задач математической физики.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Студент дал развернутый ответ на все вопросы и при этом продемонстрировал знание дополнительного материала.
отлично	Студент дал развернутый ответ на все вопросы.
очень хорошо	Студент дал ответ на все вопросы, возможно с незначительными недочетами.
хорошо	Студент ответил на большую часть вопросов с незначительными недочетами.
удовлетворительно	Студент ответил на большую часть вопросов с существенными недочетами.
неудовлетворительно	При ответе студент допускает грубые ошибки в основном материале и решении стандартных задач.
плохо	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

### Основная литература:

1. Солдатов Михаил Александрович. Математический анализ функции одного переменного : учеб. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки "Физика", "Электроника и нанoeлектроника", "Информ. системы и технологии" / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2013. - 309 с. - ISBN 978-5-91326-276-9 : 239.99., 112 экз.
2. Солдатов Михаил Александрович. Математический анализ функции многих переменных : учеб. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.02 "Физика", 11.03.04 "Электроника и нанoeлектроника", 09.03.02 "Информ. системы и технологии", 28.03.02 "Нанотехнологии и микросистемная техника" / под общ. ред. М. А. Солдатова ; ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2014. - 227 с. - ISBN 978-5-91326-309-4 : 123.40., 92 экз.
3. Солдатов Михаил Александрович. Интегралы несобственные и зависящие от параметра. Ряды : учеб. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.02 "Физика", 11.03.04 "Электроника и нанoeлектроника", 09.03.02 "Информ. системы и технологии", 28.03.02 "Нанотехнологии и микросистем. техника" / под ред. М. А. Солдатова ; ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2014. - 184 с. - ISBN 978-5-91326-313-1 : 140.53., 94 экз.
4. Берман Георгий Николаевич. Сборник задач по курсу математического анализа : [для вузов]. - 20-е изд. - М. : Наука, 1985. - 383 с. : ил. - 1.20., 324 экз.

### Дополнительная литература:

1. Круглова С. С. Теория пределов. Дифференциальное исчисление функций одной переменной : электронное учебно-методическое пособие / Круглова С. С., Галкина С. Ю., Галкин О. Е. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2010. - 96 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730023&idb=0>.
2. Галкина С. Ю. Неопределенный интеграл : курс лекций / Галкина С. Ю., Галкин О. Е. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2015. - 37 с. - Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 011200 «Физика», 210100 «Электроника и нанoeлектроника», 230400 «Информационные системы и технологии», 222900 «Нанотехнологии и микросистемная техника». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730143&idb=0>.
3. Галкина С. Ю. Определенный интеграл и его приложения : курс лекций / Галкина С. Ю., Галкин О. Е. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2015. - 40 с. - Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 011200 «Физика», 210100 «Электроника и нанoeлектроника», 230400 «Информационные системы и технологии», 222900 «Нанотехнологии и микросистемная техника». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730154&idb=0>.
4. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Курс математического анализа : [учеб. для физ.-мат. и инженер.-

- физ. специальностей вузов] : в 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 1988. - 712 с. : ил. - ISBN 5-06-001290-5 (в пер.) : 1.60., 261 экз.
5. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Курс математического анализа : учеб. для студентов физ.-мат. и инженер.-физ. специальностей вузов : в 3 т. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 1988-. Курс математического анализа. Т. 2. - 1988. - 575, [1] с. : ил. - ISBN 5-06-000444-9, 5-06-00145 (Т.2) : 1.40., 181 экз.
6. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Курс математического анализа : [учеб. для физ.-мат. и инженер.-физ. специальностей вузов] : в 3 т. Т. 3. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 1989. - 351, [1] с. : ил. - ISBN 5-06-000444-9, 5-06-00151 : 0.95., 171 экз.
7. Ильин Владимир Александрович. Основы математического анализа : учеб. для студентов физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" : [в 2 ч.]. Ч. 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - Изд. 7-е, стер. - М. : Физматлит, 2019. - 648 с. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова ; вып. 1). - ISBN 978-5-9221-0902-4 : 1161.00., 1 экз.
8. Ильин Владимир Александрович. Основы математического анализа : учеб. для студентов физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" : в 2 ч. Ч. 2. - Изд. 4-е, стер. - М. : Физматлит, 2001. - 464 с. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова ; вып. 2). - ISBN 5-9221-0131-5 (вып. 2). - ISBN 5-9221-0134-X : 140.00., 31 экз.
9. Фихтенгольц Григорий Михайлович. Основы математического анализа. Ч. 1. - СПб. : Лань, 2001. - 448 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0190-6 : 81.00., 3 экз.
10. Фихтенгольц Григорий Михайлович. Основы математического анализа. Ч. 2. - Изд. 7-е, стер. - СПб. : Лань, 2005. - 464 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-9511-0010-0. - ISBN 5-8114-0191-4 (ч. 2) : 145.00., 4 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

[www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru) ЭБС «Университетская библиотека онлайн»

[www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru) Научная электронная библиотека

[www.ebiblioteka.ru](http://www.ebiblioteka.ru) Универсальные базы данных изданий

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 09.03.02 - Информационные системы и технологии.

Автор(ы): Ястребова Ирина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Морозов Олег Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 20.01.2022, протокол № б/н.