

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Непрерывные математические модели

Уровень высшего образования

Магистратура

Направление подготовки / специальность

01.04.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование физико-механических процессов

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.02 Непрерывные математические модели относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-4: Способен разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач	<p>ПК-4.1: Знает методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач</p> <p>ПК-4.2: Умеет применять методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач</p> <p>ПК-4.3: Имеет навыки применения методов разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач</p>	<p>ПК-4.1: Знать специализированные разделы механики деформируемого твердого тела, необходимые при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях</p> <p>ПК-4.2: Уметь применять методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей при решении исследовательских и практических задач механики деформируемого твердого тела генерировать новые подходы.</p> <p>ПК-4.3: Владеть навыками, владеет специальными методами, решения задач идентификации свойств материала</p>	Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы Задания
ПК-5: Способен разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач	<p>ПК-5.1: Знает типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности</p> <p>ПК-5.2: Умеет применять</p>	ПК-5.1: Знать типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения непрерывных математических моделей	Контрольная работа	Зачёт: Задания

научной деятельности	<p>типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности</p> <p>ПК-5.3: Имеет навыки разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности</p>	<p>ПК-5.2: Уметь применять типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач в области непрерывных математических моделей.</p> <p>ПК-5.3: Владеть навыками разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач непрерывных математических моделей.</p>		
----------------------	--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
самостоятельная работа	7
Промежуточная аттестация	0
	Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора торные работы), часы	Всего	

	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О
Тема 1. Математические модели и математическое моделирование.	22	10	10	20	2
Тема 2. Методы исследования непрерывных математических моделей.	22	10	10	20	2
Тема 3. Инструменты исследования непрерывных математических моделей.	27	12	12	24	3
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	32	32	65	7

Содержание разделов и тем дисциплины

Содержание разделов и тем дисциплины:

1. Тема 1: Математические модели и математическое моделирование.

а. Непрерывные математические модели. Введение в предметную область. Типы моделей. Классификация моделей.

б. Эмпирические модели материалов. Методы идентификации.

с. Процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

д. Процессы, описываемые уравнениями в частных производных.

е. Модель непрерывной сплошной среды.

2. Тема 2: Методы исследования непрерывных математических моделей.

а. Численные методы решения ОДУ.

б. Метод конечного элемента для решения уравнений в частных производных. Аппроксимация. Слабая формулировка уравнений.

с. Метод Ньютона-Рафсона для решения нелинейных задач.

3. Тема 3: Инструменты исследования непрерывных математических моделей.

а. Инструменты символьных вычислений (среда Google Collab и библиотека sympy)

б. Инструменты численного решения уравнений (среда Google Collab и библиотеки numpy и scipy).

с. Средства для разработки конечно-элементных решателей для уравнений в частных производных (dealii, py-pde, SfePy, FEniCS).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены ниже

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

1. Теоретические основы математического моделирования

«Дайте определение математической модели. Перечислите основные типы непрерывных математических моделей и приведите примеры их применения.»

2. Методы решения дифференциальных уравнений

«Какие численные методы используются для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)? Опишите алгоритм одного из них (например, метода Эйлера или Рунге-Кутты).»

3. Уравнения в частных производных и методы их решения

«В чем заключается метод конечных элементов (МКЭ) для уравнений в частных производных? Какие этапы включает его применение?»

4. Идентификация моделей и нелинейные задачи

«Как работает метод Ньютона-Рафсона для решения нелинейных уравнений? Приведите пример задачи, где он применяется.»

5. Программные инструменты моделирования

«Назовите библиотеки Python для символьных и численных вычислений. Какую задачу можно решить с помощью библиотеки FEniCS или SfePy?»

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-5:

1. Теоретические основы математического моделирования

«Дайте определение математической модели. Перечислите основные типы непрерывных математических моделей и приведите примеры их применения.»

2. Методы решения дифференциальных уравнений

«Какие численные методы используются для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)? Опишите алгоритм одного из них (например, метода Эйлера или Рунге-Кутты).»

3. Уравнения в частных производных и методы их решения

«В чем заключается метод конечных элементов (МКЭ) для уравнений в частных производных? Какие этапы включает его применение?»

4. Идентификация моделей и нелинейные задачи

«Как работает метод Ньютона-Рафсона для решения нелинейных уравнений? Приведите пример задачи, где он применяется.»

5. Программные инструменты моделирования

«Назовите библиотеки Python для символьных и численных вычислений. Какую задачу можно решить с помощью библиотеки FEniCS или SfePy?»

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три незначительные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными незначительными	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

			полном объеме	объеме, но некоторые с недочетами	с недочетами	недочетам и, выполнены все задания в полном объеме	
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-4

1. Теоретические основы математического моделирования

«Дайте определение математической модели. Перечислите основные типы непрерывных математических моделей и приведите примеры их применения.»

2. Методы решения дифференциальных уравнений

«Какие численные методы используются для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)? Опишите алгоритм одного из них (например, метода Эйлера или Рунге-Кутты).»

3. Уравнения в частных производных и методы их решения

«В чем заключается метод конечных элементов (МКЭ) для уравнений в частных производных? Какие этапы включает его применение?»

4. Идентификация моделей и нелинейные задачи

«Как работает метод Ньютона-Рафсона для решения нелинейных уравнений? Приведите пример задачи, где он применяется.»

5. Программные инструменты моделирования

«Назовите библиотеки Python для символьных и численных вычислений. Какую задачу можно решить с помощью библиотеки FEniCS или SfePy?»

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-4

1. Анализ и построение математической модели

Задание:

Дана зависимость напряжения от деформации для некоторого материала:

$$\sigma = a \cdot \epsilon + b \cdot \epsilon^2 \text{ (где } a, b \text{ – константы).}$$

Определите тип модели (линейная/нелинейная), обоснуйте выбор. Постройте график в Google Colab (с помощью sympy или matplotlib) для $a=2$, $b=0.5$ и проанализируйте поведение функции.

2. Численное решение ОДУ

Задание:

Решите уравнение движения маятника с трением:

$$\theta''(t) + k \cdot \theta'(t) + (g/L) \cdot \sin \theta(t) = 0$$

(θ – угол отклонения, k – коэффициент трения, g – ускорение свободного падения, L – длина маятника).

Используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка (в `scipy.integrate.solve_ivp`), постройте график $\theta(t)$ для $k=0.1$, $L=1$, $g=9.81$, начальных условий $\theta(0)=\pi/6$, $\theta'(0)=0$.

3. Решение уравнения теплопроводности (уравнение в частных производных)

Задание:

С помощью библиотеки FEniCS или `py-pde` решите одномерное уравнение теплопроводности:

$$\partial u / \partial t = \alpha \cdot \partial^2 u / \partial x^2 \quad (\alpha=0.1)$$

на интервале $x \in [0, 1]$ с граничными условиями: $u(0, t)=0$, $u(1, t)=1$, начальным условием $u(x, 0)=\sin(\pi x)$.

Визуализируйте решение при $t=0, 0.1, 0.5$.

4. Идентификация параметров модели

Задание:

Для экспериментальных данных (x , y):

$$x = [0, 1, 2, 3, 4], y = [1.1, 1.9, 3.2, 4.0, 5.1]$$

подберите параметры a и b в модели $y = a \cdot x + b$, используя метод наименьших квадратов (с помощью `numpy.linalg.lstsq` или `scipy.optimize.curve_fit`). Оцените погрешность аппроксимации.

5. Применение метода Ньютона-Рафсона

Задание:

Найдите корень уравнения $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ с точностью $\varepsilon=1e-6$, используя метод Ньютона-Рафсона. Напишите код на Python (с `sympy` для вычисления производной или аналитически). Постройте график $f(x)$ и отметьте найденный корень.

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1. Анализ и построение математической модели

Задание:

Дана зависимость напряжения от деформации для некоторого материала:

$$\sigma = a \cdot \varepsilon + b \cdot \varepsilon^2 \quad (\text{где } a, b - \text{константы}).$$

Определите тип модели (линейная/нелинейная), обоснуйте выбор. Постройте график в Google Colab (с помощью `sympy` или `matplotlib`) для $a=2$, $b=0.5$ и проанализируйте поведение функции.

2. Численное решение ОДУ

Задание:

Решите уравнение движения маятника с трением:

$$\theta''(t) + k \cdot \theta'(t) + (g/L) \cdot \sin\theta(t) = 0$$

(θ – угол отклонения, k – коэффициент трения, g – ускорение свободного падения, L – длина маятника).

Используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка (в `scipy.integrate.solve_ivp`), постройте график $\theta(t)$ для $k=0.1$, $L=1$, $g=9.81$, начальных условий $\theta(0)=\pi/6$, $\theta'(0)=0$.

3. Решение уравнения теплопроводности (уравнение в частных производных)

Задание:

С помощью библиотеки FEniCS или `py-pde` решите одномерное уравнение теплопроводности:

$$\partial u / \partial t = \alpha \cdot \partial^2 u / \partial x^2 \quad (\alpha=0.1)$$

на интервале $x \in [0, 1]$ с граничными условиями: $u(0, t)=0$, $u(1, t)=1$, начальным условием $u(x, 0)=\sin(\pi x)$.

Визуализируйте решение при $t=0, 0.1, 0.5$.

4. Идентификация параметров модели

Задание:

Для экспериментальных данных (x, y) :

$$x = [0, 1, 2, 3, 4], y = [1.1, 1.9, 3.2, 4.0, 5.1]$$

подберите параметры a и b в модели $y = a \cdot x + b$, используя метод наименьших квадратов (с помощью `numpy.linalg.lstsq` или `scipy.optimize.curve_fit`). Оцените погрешность аппроксимации.

5. Применение метода Ньютона-Рафсона

Задание:

Найдите корень уравнения $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ с точностью $\varepsilon=1e-6$, используя метод Ньютона-Рафсона. Напишите код на Python (с `sympy` для вычисления производной или аналитически). Постройте график $f(x)$ и отметьте найденный корень.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три незначительные ошибки, исправленные по требованию преподавателя

Оценка	Критерии оценивания
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Муратова Татьяна Владимировна. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для вузов / Т. В. Муратова. - Москва : Юрайт, 2025. - 524 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-534-19174-5. - Текст : электронный // ЭБС "Юрайт"., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=924323&idb=0>.
2. Андреев В. К. Математические модели механики сплошных сред / Андреев В. К. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 240 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-1998-2., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=800164&idb=0>.
3. Зенкевич Ольгерд. Конечные элементы и аппроксимация / пер. с англ. Б. И. Квасова ; под ред. Н. С. Бахвалова. - М. : Мир, 1986. - 318 с. : ил. - 1.70., 1 экз.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / пер. с англ. А. М. Васильева ; под ред. Э. И. Григолюка. - М. : Мир, 1976. - 464 с. - 2.14., 2 экз.
5. Слабнов В. Д. Численные методы : учебник для вузов / Слабнов В. Д. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2024. - 392 с. - Книга из коллекции Лань - Информатика. - ISBN 978-5-507-47312-0., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=885299&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Абросимов Николай Анатольевич. Математические модели решения нелинейных задач динамики многослойных композитных оболочек : учеб. пособие : для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.04.03 "Механика и математическое моделирование", 01.04.02 "Прикладная математика и информатика", и аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.06.01 "Математика и механика", направленность 01.02.04 "Механика деформируемого твердого тела", 01.02.06 "Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры" / Н. А. Абросимов ; ННГУ. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2019. - 55 с. - ISBN 978-5-91326-503-6 : 58.92., 2 экз.
2. Абросимов Николай Анатольевич. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций : монография / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2002. - 400 с. : ил. - ISBN 5-85746-639-3 : 40.00., 4 экз.
3. Численные методы : учебник и практикум для спо / У. Г. Пирумов [и др.] ; под редакцией У. Г. Пирумова. - 5-е изд. - Москва : Юрайт, 2024. - 421 с. - (Профессиональное образование). - URL: <https://urait.ru/bcode/542793> (дата обращения: 15.08.2024). - ISBN 978-5-534-11634-2 : 1419.00. - Текст : электронный // ЭБС "Юрайт"., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=906285&idb=0>.
4. Канарейкин Александр Иванович (Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе, Старооскольский ф-). Уравнения математической физики :

Учебник / Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе, Старооскольский ф.- Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. - 148 с. - Профессиональное образование. - ISBN 978-5-9729-2071-6., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=932940&idb=0>.

5. Емельянов В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач : учебное пособие для вузов / Емельянов В. М., Рыбакина Е. А.; Рыбакина Е. А. - 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2024. - 216 с. - Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки «Техническая физика» и «Прикладная механика». - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-49441-5., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=894075&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics.htm>
2. <https://colab.google/>
3. <https://dealii.org/>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор
Константинов Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.