

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 10 от 27.08.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Функциональный анализ

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и искусственный интеллект

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.21 Функциональный анализ относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции) | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции | | Наименование оценочного средства | |
|--|--|---|------------------------------------|------------------------------|
| | Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора) | Результаты обучения по дисциплине | Для текущего контроля успеваемости | Для промежуточной аттестации |
| ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | <p>ОПК-1.1: Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук</p> <p>ОПК-1.2: Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p> <p>ОПК-1.3: Имеет практический опыт применения фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности</p> | <p>ОПК-1.1:</p> <p>ОПК-1.1: Знать понятия и утверждения дисциплины «Функциональный анализ»:</p> <ol style="list-style-type: none"> Нулевая мера. Условие «почти всюду». Определение интеграла Лебега, его свойства. Пространство L Понятия двойного и повторного интегралов Лебега. Теорема Фубини. Измеримые множества и функции. Определение МП и метрической группы, свойства расстояния. Предел. Смысл предела в некоторых конкретных МП. Плотные множества. Примеры всюду плотных множеств функций. Сепарабельное МП. Сепарабельность подмножества. Сходящиеся в себе последовательности. Полное МП. Непрерывные операции. Лишицнепрерывные операции. Принцип сжимающих отображений в полном МП. Линейное пространство. Линейно | Тест | <p>Экзамен:</p> <p>Тест</p> |

| | | | | |
|--|--|---|--|--|
| | | <p>независимые системы.</p> <p>13. Предел в ЛНП.</p> <p>Тест</p> <p>Зачёт:</p> <p>Контрольные вопросы</p> <p>Непрерывность нормы и арифметических действий.</p> <p>14. Полная система элементов. Примеры полных систем функций.</p> <p>15. Линейный ограниченный оператор.</p> <p>16. Норма оператора, формулы для нормы. Примеры оценки нормы.</p> <p>17. Принцип сжимающих отображений для линейного уравнения в В-пространстве.</p> <p>18. Оценки норм композиции и итерации.</p> <p>19. Ряд линейных ограниченных операторов. Ряд итераций.</p> <p>20. Условия существования и ограниченности обратного оператора.</p> <p>21. Критерий линейной независимости системы элементов.</p> <p>22. Гильбертово пространство (Нпространство).</p> <p>23. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых элементов.</p> <p>24. Теорема о разложении элемента в ряд Фурье в сепарабельном Нпространстве.</p> <p>25. Ортогональное дополнение.</p> <p>26. Собственные векторы и числа (значения) самосопряженного оператора.</p> <p>27. Собственное подпространство самосопряженного компактного оператора.</p> <p>28. Производные по Фреше и Гато. Свойства сильной</p> | | |
|--|--|---|--|--|

| | | | | |
|--|--|---|--|--|
| | | <p>производной.</p> <p>ОПК-1.2: ОПК-1.2: Уметь Использовать на практике знания, полученные при изучении дисциплины «Функциональный анализ»:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Определять обладает ли рассматриваемая характеристика пары элементов пространства свойствами метрики. 2. Проверять применимость и применять к приближенному решению принцип сжимающих отображений. 3. Проверять ортогональность заданной системы элементов u_i, в случае ее полноты, раскладывать по данной системе элемент f в ряд Фурье. 4. Решать линейные интегральные уравнения. <p>ОПК-1.3: ОПК-1.3: Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности; - Навыками применения методов приближенного решения операторных и интегральных уравнений. | | |
|--|--|---|--|--|

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

| | |
|---------------------------------|--------------|
| | очная |
| Общая трудоемкость, з.е. | 3 |
| Часов по учебному плану | 108 |
| в том числе | |

| | |
|--|-----------------------------|
| аудиторные занятия (контактная работа): | |
| - занятия лекционного типа | 32 |
| - занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы) | 32 |
| - КСР | 2 |
| самостоятельная работа | 6 |
| Промежуточная аттестация | 36 Экзамен |

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

| Наименование разделов и тем дисциплины | Всего (часы) | в том числе | | | |
|--|--------------|--|--|-------------|---|
| | | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них | | | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
| | | Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы | Всего | |
| 0 Ф 0 | 0 Ф 0 | 0 Ф 0 | 0 Ф 0 | 0 Ф 0 | |
| Тема 1 Введение. Предмет дисциплины. Обзор основных разделов курса. Некоторые вопросы истории предмета и примеры. | 5 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| Тема 2 Интеграл Лебега и Лебеговы пространства Пространства , виды пределов в пространствах и непрерывность интеграла. Ограниченные измеримые функции. Существенная верхняя грань функции. | 13 | 6 | 6 | 12 | 1 |
| Тема 3 Метрическое пространство (МП) и непрерывные операции Определение МП и метрической группы, свойства расстояния. Примеры конечно- и счетномерных, функциональных пространств. Предел. Сепарабельное МП Принцип сжимающих отображений в полном МП. | 13 | 6 | 6 | 12 | 1 |
| Тема 4 Линейное нормированное пространство (ЛНП) и линейные ограниченные операторы Предел в ЛНП. Полная система элементов. Банахово пространство (В-пространство). Норма оператора, формулы для нормы. Примеры оценки нормы. Принцип сжимающих отображений для линейного уравнения в В-пространстве. Условия существования и ограниченности обратного оператора. | 13 | 6 | 6 | 12 | 1 |
| Тема 5 Гильбертово пространство и самосопряженные операторы Гильбертово пространство (Н-пространство). Теорема о разложении элемента в ряд Фурье в сепарабельном Н-пространстве. Свойства ряда Фурье. Общий вид линейного ограниченного оператора в сепарабельных Н-пространствах. Теорема Гильберта-Шмидта о представлении самосопряженного компактного оператора. Альтернатива Фредгольма. | 13 | 6 | 6 | 12 | 1 |
| Тема 6 Сильное дифференцирование Производные по Фреше и Гато. Свойства сильной производной. | 13 | 6 | 6 | 12 | 1 |
| Аттестация | 36 | | | | |
| КСР | 2 | | | 2 | |
| Итого | 108 | 32 | 32 | 66 | 6 |

Содержание разделов и тем дисциплины

Интеграл Лебега.

Нулевая мера. Условие «почти всюду». Определение интеграла Лебега, его свойства. Пространства L_p . Виды пределов в пространствах L_p и непрерывность интеграла. Сходимости в среднем порядка p . Полнота пространств L_p . Пространство L_2 . Понятия двойного и повторного интегралов Лебега. Измеримые множества и функции. П. в. ограниченные измеримые функции.

Метрическое пространство. Предел. Непрерывные операции.

Определение МП, свойства расстояния. Примеры конечно- и счетномерных, функциональных пространств. Шары. Окрестность точки, внутренние точки. Ограниченные, открытые множества. Точка прикосновения, замкнутое множество. Соотношение между открытыми и замкнутыми множествами. Замыкание и его замкнутость. Предел, его свойства. Непрерывность расстояния. Смысл предела в некоторых конкретных МП. Плотные множества. Примеры всюду плотных множеств функций. Сепарабельное МП. Сепарабельность подмножества. Сходящиеся в себе последовательности. Полное МП. Предкомпактное множество, его свойства. Критерий Хаусдорфа предкомпактности. Компакт. Непрерывные и липшиц-непрерывные операции. Принцип сжимающих отображений в полном МП.

Линейное пространство.

Линейное пространство (ЛП). Линейные комбинации, линейная оболочка. Линейно независимые системы. Линейное подпространство. Линейный оператор. ЛП линейных операторов. Композиция. Итерация. Обратный оператор, его линейность.

Линейное нормированное пространство.

ЛНП, определение. Свойства нормы. Замкнутое линейное подпространство. Предел. Непрерывность нормы и арифметических действий. Полная система элементов. Примеры полных систем функций. Банахово пространство (В-пространство). Ряд элементов В-пространства, достаточный признак сходимости. Линейный ограниченный оператор. Эквивалентность условий ограниченности и непрерывности для линейного оператора. Норма оператора, формулы для нормы. Примеры оценки нормы. Принцип сжимающих отображений для линейного уравнения в В-пространстве. ЛНП линейных ограниченных операторов. Оценки норм композиции и итерации. Сильный (равномерный) и слабый (поточечный) пределы последовательности линейных ограниченных операторов.

В-пространство линейных ограниченных операторов. Ряд линейных ограниченных операторов. Ряд итераций и обратный оператор.

Положительно определённые операторы в ЛНП.

Условия существования и ограниченности обратного оператора.

Н-пространство

Определение унитарного (предгильбертова) пространства. Определитель Грама. Критерий линейной независимости системы элементов. Неравенство Коши-Буняковского. Унитарное пространство как частный случай ЛНП. Непрерывность скалярного произведения. Гильбертово пространство (Н-пространство). Ортогональность. Равенство Пифагора. Система элементов, замкнутая относительно ортогональности. Замкнутость относительно ортогональности полной системы элементов. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых элементов. Ортогонализация. Базис Н-пространства. Существование конечного или счётного базиса в сепарабельном Н-пространстве. Теорема о разложении элемента в ряд Фурье в сепарабельном бесконечномерном Н-пространстве. Свойства ряда Фурье.

Общий вид линейного ограниченного оператора в сепарабельных Н-пространствах.

Самосопряжённый оператор и его границы. Положительно определённые операторы в Н-пространстве.

Положительная определённость оператора в Н- и В-пространствах.

Ортогональное дополнение. Лемма о разложении элемента сепарабельного Н-пространства в ортогональную сумму двух элементов.

Собственные векторы и числа (значения) самосопряженного оператора. Собственное подпространство самосопряженного компактного оператора. Максимальный элемент.

Теорема Гильберта-Шмидта о представлении самосопряжённого компактного оператора.

Альтернатива Фредгольма.

Сильное дифференцирование.

Сильное дифференцирование первого порядка. Свойства сильной производной. Метод касательных и его модификация. Непрерывная производная. Произведение В- и Н- пространств. Сильные частные производные. Оценки частного конечного приращения. Сильное дифференцирование состояния по управлению. Сильное дифференцирование функционалов. Необходимое условие экстремума. Необходимые условия оптимального управления.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Функциональный анализ ДО, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=788>.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

| В приведенных ниже вопросах одно или несколько утверждений являются верными. Укажите их номера в таблице для ответов справа | Ответ |
|---|-------|
| Вопрос 1 Укажите примеры счетных множеств 1) Множество целых чисел 2) Множество рациональных чисел 3) Множество действительных чисел 4) Множество простых чисел 5) Множество всех алгебраических полиномов с целыми коэффициентами 6) Множество всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами 7) Множество непрерывных функций | |
| Вопрос 2 Что такое покрытие множества M точек числовой прямой? 1) Система интервалов, объединение которых содержит в себе множество M 2) Система интервалов, объединение которых содержится в множестве M 3) Система интервалов, каждый из которых содержит в себе множество M 4) Система интервалов, каждый из которых содержится в множестве M | |
| Вопрос 3 Укажите верные утверждения для функции на отрезке 1) Если для функции на отрезке существует интеграл Римана, то для нее существует интеграл Лебега 2) Если для функции на отрезке существует интеграл Лебега, то для нее существует интеграл Римана 3) Существует функция, интегрируемая по Лебегу, но не интегрируемая по Риману 4) Существует функция, интегрируемая по Риману, но не интегрируемая по Лебегу | |

Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)

| Оценка | Критерии оценивания |
|---------------------|---|
| превосходно | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. |
| отлично | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок. |
| очень хорошо | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок |
| хорошо | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок |
| удовлетворительно | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки. |
| неудовлетворительно | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. |
| плохо | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа |

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
|--|---|---|--|---|---|--|---|
| | не зачтено | | | зачтено | | | |
| <u>Знания</u> | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет. | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. |
| <u>Умения</u> | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения | Продемонстрированы основные умения. Решены типовые | Продемонстрированы все основные умения. Решены все | Продемонстрированы все основные умения. Решены все | Продемонстрированы все основные умения. Решены | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные |

| | | | | | | | |
|---------------|--|---|---|--|--|--|---|
| | вследствие отказа обучающегося от ответа | умения. Имели место грубые ошибки | задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме | основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме | задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u> | Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми и недочетами | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми и недочетами | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов | Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов | Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач |

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

| Оценка | | Уровень подготовки |
|------------|----------------------------|--|
| зачтено | превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой |
| | отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично». |
| | очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо» |
| | хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо». |
| | удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно». |
| | плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

| В приведенных ниже вопросах одно или несколько утверждений являются верными. Укажите их номера в таблице для ответов справа | Ответ |
|---|-------|
| <p>Вопрос 1 Укажите примеры счетных множеств</p> <p>1) Множество целых чисел 6) Множество всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами</p> <p>2) Множество рациональных чисел 7) Множество непрерывных функций</p> <p>3) Множество действительных чисел</p> <p>4) Множество простых чисел</p> <p>5) Множество всех алгебраических полиномов с целыми коэффициентами</p> | |
| <p>Вопрос 2 Что такое покрытие множества M точек числовой прямой?</p> <p>1) Система интервалов, объединение которых содержит в себе множество M</p> <p>2) Система интервалов, объединение которых содержится в множестве M</p> <p>3) Система интервалов, каждый из которых содержит в себе множество M</p> <p>4) Система интервалов, каждый из которых содержится в множестве M</p> | |
| <p>Вопрос 3 Укажите верные утверждения для функции на отрезке</p> <p>1) Если для функции на отрезке существует интеграл Римана, то для нее существует интеграл Лебега</p> <p>2) Если для функции на отрезке существует интеграл Лебега, то для нее существует интеграл Римана</p> <p>3) Существует функция, интегрируемая по Лебегу, но не интегрируемая по Риману</p> <p>4) Существует функция, интегрируемая по Риману, но не интегрируемая по Лебегу</p> | |

Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)

| Оценка | Критерии оценивания |
|---------------------|---|
| превосходно | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. |
| отлично | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок. |
| очень хорошо | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок |
| хорошо | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок |
| удовлетворительно | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки. |
| неудовлетворительно | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. |
| плохо | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа |

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

- Треногин В. А. Функциональный анализ / Треногин В. А. - 4-е, изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 488 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0804-1., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=700531&idb=0>.
- Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика / Лебедев В. И. - 4-е, изд. -

Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 296 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань.
- Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 5-9221-0092-0.,
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=700461&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Каримов З. Ш. Функциональный анализ в задачах Задачник-практикум и методические указания для студентов специальности «Математика»: методические указания / Каримов З. Ш. - Уфа : БГПУ имени М. Акмуллы, 2016. - 64 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции БГПУ имени М. Акмуллы - Математика.,
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=716570&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Кротов Николай Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 25.06.2025, протокол № Протокол №11.