

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Прикладной тензорный анализ

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и искусственный интеллект

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.02.02 Прикладной тензорный анализ относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1: Знать методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Уметь применять математические методы обработки информации, в том числе полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Уметь корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, уметь применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеть навыками использования математических методов обработки информации, в том числе полученной в результате</p>	Контрольная работа Собеседование	Зачёт: Задания Контрольные вопросы

		экспериментальных исследований		
--	--	--------------------------------	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
самостоятельная работа	7
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	
Введение	3	2		2	1
Тензорная алгебра	21	8	12	20	1
Дифференциальное исчисление	19	8	10	18	1
Интегральное исчисление	17	8	8	16	1
Приложения	5	2	2	4	1
Тензорные функции	3	2		2	1
Обзор курса	3	2		2	1
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	32	32	65	7

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Введение. Математическое моделирование. Евклидово ориентированное пространство. Системы координат. Инвариантность. Физические величины и их тензорные свойства. Скаляры, векторы, тензоры. Краткие исторические сведения.
2. Тензорная алгебра. Тензоры нулевого ранга – скаляры. Тензоры 1-го ранга – векторы (определение, полярные и аксиальные, сложение, умножение вектора на скаляр, линейное /векторное/ пространство, линейная зависимость векторов, базис и размерность векторного пространства, системы координат, скалярное, векторное, смешанное умножение векторов, координаты вектора, некоторые формулы векторной алгебры). Появление тензоров 2-го ранга (математическое, механическое: тензор инерции, тензор напряжений). Тензоры 2-го ранга (определения, алгебраические операции: транспонирование, сложение, умножения, двойные умножения, свойства и характеристики: след, векторный инвариант, определитель, единичный, обратный, взаимный, симметричный, антисимметричный, шаровой, девиатор, ортогональный, положительно определённый, собственные числа и собственные векторы, спектральное разложение, возведение в степень, теорема Гамильтона-Кэли, инварианты, тензорный базис, координаты тензора, преобразование координат, тензорный признак /теорема деления тензоров/, тензорная поверхность). Тензоры высших рангов (определения, тензор Леви-Чивиты, символы Леви-Чивиты, символы Риччи, изотропные, гиротропные).
3. Дифференциальное исчисление. Тензорное поле. Криволинейные системы координат. Радиус-вектор. Основной и взаимный базис. Набла-оператор Гамильтона. Градиент тензорного поля (скалярное, векторное, тензорное высшего ранга). Потенциальное поле. Линейный тензор деформации. Тензор спина. Вихрь векторного поля. Формула Гельмгольца. Вычисление градиента. Дивергенция тензорного поля. Соленоидальное поле. Вычисление дивергенции. Ротор (вихрь) векторного поля. Вычисление ротора. Двукратное дифференцирование. Оператор Лапласа. Тензор несовместимости. Дифференцирование базисных векторов. Символы Кристоффеля.
4. Интегральное исчисление. Формулы Стокса. Формулы Остроградского-Гаусса. Формулы Грина. Формулы Гаусса.
5. Приложения. Уравнения движения абсолютно твёрдого тела. Моделирование поведения сплошной среды.
6. Тензорные функции тензорного аргумента. Аналитические функции тензора 2-го ранга. Изотропные функции. Дифференцирование по тензорному аргументу. Производные от инвариантов тензора 2-го ранга.
7. Обзор курса. Подготовка к промежуточной аттестации.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Дополнительная литература:

1. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П.А.Жилин. – СПб.: Нестор, 2001. – 276 с. (http://teormeh.spbstu.ru/Zhilin_New/Vec_Ten_Book.htm).
2. Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа / В.А.Пальмов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 109 с. (http://www.fea.ru/spaw2/uploads/files/Palmov/p_109.pdf).

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Вариант 1

Задание 1

Определение, свойства, физический смысл скалярного произведения векторов.

Задание 2

Преобразовать выражение $\text{tr}(\mathbf{a} \times \mathbf{P}^T \times \mathbf{b})$.

Задание 3

Решить уравнение $(\text{tr } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X})\mathbf{B} + \alpha\mathbf{X} = \beta\mathbf{C}$.

Вариант 2

Задание 1

Определение, свойства, геометрический смысл векторного произведения векторов.

Задание 2

Преобразовать выражение $\text{tr}[(\mathbf{P}^T \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$.

Задание 3

Решить уравнение $(\text{tr } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X})\mathbf{B} + \alpha\mathbf{X}^T = \beta\mathbf{C}$.

Вариант 3

Задание 1

Определение, свойства, геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Задание 2

Преобразовать выражение $\text{tr}[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{P}^T)]$.

Задание 3

Решить уравнение $(\text{tr } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T)\mathbf{B} + \alpha\mathbf{X} = \beta\mathbf{C}$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

1. Физическое пространство.
2. Классификация физических величин.
3. Евклидово геометрическое пространство.
4. Векторное пространство.
5. Скалярное произведение векторов.
6. Векторное произведение векторов.
7. Смешанное произведение векторов.
8. Двойное векторное произведение векторов.
9. Линейная зависимость системы векторов.
10. Базис векторного пространства.
11. Координаты вектора в базисе (ковариантные и контравариантные координаты).
12. Действия с векторами в координатах.
13. Действия с векторами в декартовом ортонормированном базисе (декартовой прямоугольной системе координат)
14. Тензоры 0-ранга – скалярные величины.
15. Тензоры 1-ранга – векторные величины.
16. Полярные (истинные) и аксиальные (псевдовекторы) векторы.
17. Прямое декартово произведение.
18. Тензорное произведение векторных пространств.
19. Множество диад.
20. Тензоры 2-ранга и высших рангов.
21. Истинные и псевдовекторы тензоры.
22. Транспонирование (перестановка) векторов полиад.
23. Скалярное произведение тензоров.
24. Векторное произведение тензоров.
25. Тензорное произведение тензоров.

26. Двойные произведения тензоров.
27. Многократные произведения тензоров.
28. Линейное отображение векторного пространства. Линейная форма.
29. Билинейная форма. Квадратичная форма.
30. Полилинейная форма.
31. След тензора 2-ранга.
32. Векторный инвариант тензора 2-ранга, вектор сопутствующий тензору 2-ранга.
33. Симметричный тензор 2-ранга.
34. Анти симметричный (кососимметричный) тензор 2-ранга.
35. Единичный (метрический) тензор 2-ранга.
36. Существование единичного тензора 2-ранга – диадное представление.
37. Доказательство единственности единичного тензора 2-ранга.
38. Шаровой тензор 2-ранга.
39. Девиатор.
40. Разложение симметричного тензора 2-ранга.
41. Разложение произвольного тензора 2-ранга.
42. Определитель (детерминант) тензора 2-ранга.
43. Обратный тензор 2-ранга.
44. Тензор алгебраических дополнений (взаимный тензор) 2-ранга.
45. Определитель суммы тензоров 2-ранга.
46. Ортогональный тензор 2-ранга.
47. Тензор поворота.
48. Теорема Эйлера.
49. Тензор инверсии.
50. Положительно определённый тензор 2-ранга.
51. Полярное разложение тензора 2-ранга.

52. Собственные числа (главные значения) и собственные векторы (главные оси, главные направления) тензора 2-ранга.
53. Характеристическое (определяющее, вековое) уравнение.
54. Равенство левых и правых собственных векторов.
55. Ортонормированность собственных векторов.
56. Главные инварианты тензора 2-ранга.
57. Спектральное разложение (канонический вид) тензора 2-ранга.
58. Возведение в степень тензора 2-ранга.
59. Теорема Гамильтона-Кэли.
60. Аналитические функции тензора 2-ранга.
61. Координаты тензора 2-ранга (ковариантные, контравариантные, смешанные координаты).
62. Координаты тензора произвольного ранга.
63. Тензор Леви-Чивиты, символы Леви-Чивиты, символы Риччи (символы перестановок).
64. Изотропные тензоры 4-ранга.
65. Тензорное поле.
66. Радиус-вектор и естественный базис евклидова пространства. Координатные линии и поверхности.
67. Набла-оператор Гамильтона.
68. Градиент тензорного поля.
69. Дивергенция тензорного поля.
70. Ротор (вихрь) тензорного поля.
71. Потенциальное векторное поле.
72. Соленоидальное векторное поле.
73. Безвихревое векторное поле.
74. Дифференцирование тензорных полей.
75. Двукратное дифференцирование тензорных полей.

76. Оператор Лапласа (лапласиан).
77. Тензор несовместимости.
78. Дифференцирование векторов естественного базиса. Символы Кристоффеля.
79. Интегрирование тензорных полей.
80. Формулы Стокса.
81. Формулы Остроградского-Гаусса.
82. Формулы Грина.
83. Формулы Гаусса.
84. Дифференцирование тензорных функций по тензорному аргументу.
85. Дифференцирование главных инвариантов тензора 2-ранга.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
		не зачтено		зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.	Уровень знаний ниже минимальных требований.	Минимально допустимый уровень	Уровень знаний в объеме, соответствующий	Уровень знаний в объеме, соответствующий	Уровень знаний в объеме, соответствующий	Уровень знаний в объеме, превышающий

	Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Имели место грубые ошибки	знаний. Допущено много негрубых ошибок	ющем программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	ющем программе подготовки . Допущено несколько несущественных ошибок	ующем программе подготовк и. Ошибок нет.	м программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»

не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-13

- Доказать $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$. (ЗК14)
- Преобразовать $(a \times b) \times c$. (ЗК3)
- Преобразовать $(a \times b) \cdot (c \times d)$. (ЗК18)
- Преобразовать $(a \times b) \times (c \times d)$.
- Доказать $a \cdot (b \times c) d = (a \cdot d) b \times c + (b \cdot d) c \times a + (c \cdot d) a \times b$. (ЗК19)
- Доказать $a = n(a \cdot n) + n \times (a \times n)$, где n – единичный вектор.
- Дано: i, j, k – ортонормированный базис, правая тройка; $a = i + k$; $b = 2i - k$; $X = ii + ij + 4ki - 2lj$; $Y = ii + 2ki - kj$. Вычислить: а) $ab + X$; б) $(tr X)Y$; в) $a \cdot Xb$; г) $a \times X \cdot b$; д) $aX \times b$; е) $a \times (X \cdot Y) \cdot b$; ж) $a \cdot (X \times Y) \times b$.
- Доказать соотношения:
 $a \cdot Q = Q^T \cdot a$; $P \times a = -(a \times P^T)^T$; $(P \cdot Q)^T = Q^T \cdot P^T$; $tr Q = tr Q^T$; $tr(P \times a) = tr(a \times P)$;
 $tr(P \cdot Q) = tr(Q \cdot P) = tr(Q^T \cdot P^T) = tr(P^T \cdot Q^T)$
- Упростить (преобразовать) выражения (вычислить):
 $(P \times a)$; $(P^T \times a)$; $(a \times P)$; $(a \times P^T)$
- Упростить (преобразовать) выражения (вычислить):
 $tr(a \times P \times b)$; $tr[(P \times a) \times b]$; $tr[a \times (b \times P)]$; $tr[(P \times a)^T \times b]$; $tr[a \times (b \times P)^T]$;
 $tr(a \times P^T \times b)$; $tr[(P^T \times a) \times b]$; $tr[a \times (b \times P^T)]$; $tr[(P^T \times a)^T \times b]$; $tr[a \times (b \times P^T)^T]$;
- Упростить (преобразовать) выражения (вычислить):
 $(a \times P \times b)$; $[(P \times a) \times b]^T$; $[a \times (b \times P)]^T$; $[(P \times a)^T \times b]^T$; $[a \times (b \times P)^T]^T$;
 $(a \times P^T \times b)$; $[(P^T \times a) \times b]^T$; $[a \times (b \times P^T)]^T$; $[(P^T \times a)^T \times b]^T$; $[a \times (b \times P^T)^T]^T$;
- Преобразовать $a \times (b \times Q)$; $(Q \times a) \times b$; $(a \times b) \times Q$; $Q \times (a \times b)$.
- Решить уравнения:
 $X + \alpha(tr X)A = B$; $X^T + \alpha(tr X)A = B$;
 $(tr A \cdot X)B + \alpha X = \beta C$; $(tr A \cdot X)B + \alpha X^T = \beta C$; $(tr A \cdot X^T)B + \alpha X = \beta C$;
 $(tr A \cdot X)A^T + (tr B \cdot X)B^T + X = C$; $(tr A \cdot X^T)A^T + (tr B \cdot X)B^T + X = C$;
 $(tr A \cdot X)A^T + (tr B \cdot X)B^T + X^T = C$; $(tr A \cdot X)A^T + (tr B \cdot X^T)B^T + X^T = C$;
- При каких условиях уравнение $\alpha X + (tr X)A = 0$ имеет ненулевые решения? Найти эти решения. (ЗК28)
- Дано: $A = 2ii + jj - ki + kj$; $B = 3ii + 5jj$. Вычислить: $(A \times B) \cdot B$; $(B \times A) \cdot B$. (ЗК29)
- Доказать, что для любых тензоров A и B $(A \times B) \cdot B^T = 0$. (ЗК30)
- Вычислить E , $tr E$, здесь E – единичный (метрический) тензор.
- Найти $tr(a \times E \times b)$ и $(a \times E \times b)$. (ЗК34)
- Доказать, что для любого вектора a тензоры $a \times E = E \times a$.
- Доказать, что для любого вектора a тензор $a \times E$ является антисимметричным тензором второго ранга, здесь E – единичный (метрический) тензор.
- Преобразовать: $a \times E \times b$. (ЗК35)
- Доказать тождество $(E \times a) \cdot P = a \times P$. (ЗК37)
- Доказать тождество $E \times a = nn \times a + a \times nn$, если $a \cdot n = 0$ и $|n| = 1$. (ЗК38)
- Доказать тождество $[(P - P^T) \times a] \cdot (b \times E)^T = (a \times P) \cdot b$. (ЗК39)
- Доказать, что для любого симметричного тензора S и любых векторов a и b $a \cdot S \cdot b = b \cdot S \cdot a$. (ЗК41а)
- Доказать, что для любого антисимметричного тензора A и любых векторов a и b $a \cdot A \cdot b = -b \cdot A \cdot a$. (ЗК41б)
- Доказать, что след любого антисимметричного тензора второго ранга равен нулю $tr A = 0$. (ЗК42)
- Доказать, что для любого симметричного тензора S и любого антисимметричного тензора A след их скалярного произведения равен нулю $tr(S \cdot A) = 0$. (ЗК44)

29. Доказать, что для любого симметричного тензора S и любого антисимметричного тензора A двойная свёртка равна нулю $S \cdot A = 0$. (ЗК45)
30. Для тензора $T = ii + ij + kj + lk$ найти симметричную и антисимметричную части. (ЗК53а)
31. Для тензора $T = ii + 2ij - 4ji + lkk$ найти симметричную и антисимметричную части. (ЗК53б)
32. Найти вектор, сопутствующий антисимметричному тензору $\Omega = \frac{1}{2}(ab - ba)$. (ЗК54)
33. Вычислить $(E \times \omega)^j$. (ЗК55)
34. Вычислить $(a \times E \times a)^4$. (ЗК49)
35. Доказать тождество $(a \times E)^{2m} \cdot (E \times a)^{2n+1} = 0$, где m, n – целые числа. (ЗК50)
36. Верно ли, что $(X \cdot Y)^j = X^i \cdot Y^i$? (ЗК58)
37. Доказать, что тензор $Q = (E - \Omega) \cdot (E + \Omega)^{-1}$ является ортогональным, если тензор Ω – антисимметричен. (ЗК59)
38. Доказать, что тензор $Q = \frac{1}{4+a^2}[(4-a^2)E + aa - 4E \times a]$, где $a^2 = a \cdot a$, является ортогональным. (ЗК60)
39. Доказать, что для ортогонального тензора Q справедливо тождество $(Q - E) \cdot (Q^T - E) = 6 - 2 \operatorname{tr} Q$. (ЗК61)
40. Для любого тензора второго ранга доказать соотношение $J_2(Q) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2(Q) - \operatorname{tr} Q^2)$. (ЗК64)
41. Найти главные инварианты тензора $Q = ab$. (ЗК65)
42. Найти главные инварианты тензора $Q = \frac{1}{2}(ab + ba)$, если $a \cdot b = 0$. (ЗК66)
43. Найти главные инварианты тензора $Q = E \times a$. (ЗК67)
44. Найти главные инварианты тензора $Q = (E \times a)^2$. (ЗК68)
45. Доказать, что главные инварианты ортогонального тензора связаны соотношениями: $J_1, J_2 = J_2; J_3^2 = 1$. (ЗК69)
46. Найти главные инварианты тензора $Q = aa + bb + cc$, если векторы a, b, c взаимно ортогональны. (ЗК70)
47. Доказать, что главные инварианты двух взаимно обратных симметричных тензоров 2-го ранга связаны соотношениями:
 $J_1(Q^{-1}) = -\frac{J_2(Q)}{J_1(Q)}; J_2(Q^{-1}) = \frac{J_1(Q)}{J_1(Q)}; J_3(Q^{-1}) = J_3(Q)$. (ЗК71)
48. Найти главные инварианты тензора $T = ij + j1 + 3(ii + jj) + 5lkk$. (ЗК72)
49. Чему равен третий инвариант антисимметричного тензора? (ЗК73)
50. Найти главные инварианты шарового тензора. (ЗК75)
51. Пусть Q – симметричный тензор второго ранга. Доказать, что первый инвариант дивергенции этого тензора равен нулю, а его второй инвариант не положителен. (ЗК76)
52. Доказать, что если два собственных числа симметричного тензора различны, то соответствующие им собственные векторы ортогональны. (ЗК77)
53. Найти собственные числа и собственные векторы тензора $T = 3ii - (ij + ji) + 3jj$. (ЗК78а)
54. Найти собственные числа и собственные векторы тензора $T = 7ii + 3(ij + ji) + 7jj + 4(jk + kj) + 7kk$. (ЗК78б)
55. Найти главные значения и главные оси тензора $Q = aa$. (ЗК79)
56. Найти собственные числа тензора $T = \alpha(ij + ji) + \alpha(jk + kj) + \alpha(ki + ik)$. (ЗК80)
57. В трехмерном пространстве найти собственные числа и собственные векторы тензора $Q = \alpha aa + \beta bb$, если $a \cdot b = 0$. (ЗК81)
58. Найти спектральное разложение тензора $E + aa$. (ЗК82)
59. Найти спектральное разложение тензора $Q = \alpha E + \beta aa + \gamma bb + \delta cc$, если векторы a, b, c взаимно ортогональны. (ЗК83)
60. Пользуясь формулой Гамильтона-Кэли, найти T^4 и T^{-1} , если $T = ii + 3jj - (jk + kj) - 2kk$. Проверить полученные результаты непосредственным вычислением. (ЗК84а)
61. Тензор второго ранга Q в трехмерном пространстве, определяемый формулой
 $Q = Q^T = J_1(Q)Q + J_2(Q)E$, где $J_1(Q), J_2(Q)$ – первый и второй инварианты тензора Q , называется тензором, присоединенным к тензору Q . Доказать, что для неособенного тензора Q верна формула $Q = \det(Q)Q^{-1}$. (ЗК85)
62. Пользуясь формулой Гамильтона-Кэли, найти T^4 и T^{-1} , если $T = 3(ii + jj) - (jk + kj) + lkk$. Проверить полученные результаты непосредственным вычислением. (ЗК84б)
63. Найти полярное разложение тензора $(-Q)^j$, если известно полярное разложение тензора Q . (ЗК92)
64. Найти полярное разложение тензора $Q = aa + bb + cc$ если векторы a, b, c взаимно ортогональны. (ЗК93)
65. Найти полярное разложение тензора. (ЗК94)
66. Найти полярное разложение тензора $Q = \alpha E + \beta ii + \gamma jj$. (ЗК95)
67. Найти полярное разложение тензора $P = R \cdot T \cdot R^T$, если известно полярное разложение тензора $T = U \cdot O$, а тензор R – ортогональный. (ЗК96)
68. Найти полярное разложение тензора αP^j , если известно полярное разложение тензора P . (ЗК97)
69. Найти полярное разложение тензора $Q = 3E + 4ii + 7lkk$. (ЗК98)
70. Найти полярное разложение тензора $Q = ii + jj + a(jk + kj) + kkk$. (ЗК99)
71. Найти полярное разложение особого тензора $Q = ij + jk + lk$. (ЗК100)
72. Найти полярное разложение особого тензора $E \times \omega$. (ЗК101)
73. Вычислить $\nabla \mathbf{r}, \nabla \times \mathbf{r}, \nabla \cdot \mathbf{r}$ здесь \mathbf{r} – радиус-вектор произвольной точки 3D пространства.
74. Доказать: $J(\nabla \times \mathbf{T}) = E \cdot \nabla \times \mathbf{T} = 0$, здесь $J(\cdot)$ – первый инвариант тензора второго ранга, E – единичный (метрический) тензор, \mathbf{T} – произвольный симметричный тензор второго ранга.
75. Доказать: $J(\nabla \times \mathbf{A}) = E \cdot \nabla \times \mathbf{A} = -2 \nabla \cdot \omega_A$, здесь $J(\cdot)$ – первый инвариант тензора второго ранга, E – единичный (метрический) тензор, \mathbf{A} – произвольный антисимметричный тензор второго ранга, ω_A – вектор сопутствующий тензору \mathbf{A} .
76. $\nabla(\varphi \psi) = (\nabla \varphi) \psi + \varphi (\nabla \psi)$
77. $\nabla(\varphi \mathbf{a}) = (\nabla \varphi) \mathbf{a} + \varphi (\nabla \mathbf{a})$
78. $\nabla(\varphi \mathbf{Q}) = (\nabla \varphi) \mathbf{Q} + \varphi (\nabla \mathbf{Q})$
79. $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^T = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$
80. $\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a}) \times \mathbf{b} - (\nabla \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$
81. $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{a} + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{a})$
82. $\nabla \cdot (\varphi^{(m)} \mathbf{Q}) = (\nabla \varphi) \cdot {}^{(m)}\mathbf{Q} + \varphi (\nabla \cdot {}^{(m)}\mathbf{Q})$
83. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$
84. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}$
85. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}) = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q} + \nabla \cdot (\mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{a}$
86. $\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{a} + \varphi (\nabla \times \mathbf{a})$
87. $\nabla \times (\varphi^{(m)} \mathbf{O}) = (\nabla \varphi) \times {}^{(m)}\mathbf{O} + \varphi (\nabla \times {}^{(m)}\mathbf{O})$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-13

1. Полярные и аксиальные векторы.
2. Линейная зависимость векторов.
3. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора в базисе.
4. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.
5. Скалярное, векторное, тензорное произведение тензоров.
6. Множественные произведения тензоров.
7. Свойства и характеристики тензоров 2-го ранга.
8. Тензорный базис. Координаты тензора в базисе.
9. Градиент, дивергенция, ротор тензорного поля.
10. Дифференцирование базисных векторов.
11. Интегральные формулы.
12. Аналитические функции тензора 2-го ранга.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Жидков А. В. Элементы тензорного исчисления в евклидовом пространстве: тензорная алгебра : электронное учебно-методическое пособие / Жидков А. В., Шабаров В. В. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. - 80 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729856&idb=0>.
2. Лурье Анатолий Исакович. Нелинейная теория упругости. - М. : Наука, 1980. - 512 с. - 5.20., 2 экз.
3. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / пер. с англ. Е. И. Свешниковой ; под ред. М. Э. Эглит. - М. : Мир, 1974. - 318 с. - 1.50., 12 экз.

Дополнительная литература:

1. Баландин Александр Владимирович. Тензорная алгебра : учебно-методическое пособие. Ч. 1 / А. В. Баландин, О. А. Муляр, А. Г. Разуваев ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Механико-математический факультет, Кафедра геометрии и высшей алгебры. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2004. - 16 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=825089&idb=0>.
2. Максимова Галина Михайловна. Основы векторного и тензорного анализа для физиков : учебно-методическое пособие / Г. М. Максимова, А. И. Мальшев, А. В. Тележников ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2017. - 110 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=823608&idb=0>.
3. Максимова Г. М. Сборник контрольных заданий по курсу векторного и тензорного анализа : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : ННГУ, 2002. - 33 с. : ил., табл. - 15.00., 100 экз.
4. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / пер. с англ. Р. В. Гольдштейна, В. М. Ентова ; под ред. П. А. Жилина, А. И. Лурье. - М. : Мир, 1975. - 592 с. - 2.75., 12 экз.
5. Димитриенко Юрий Иванович. Нелинейная механика сплошной среды : Учебное пособие. - Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2009. - 624 с. - ВО - Бакалавриат. - ISBN 978-5-9221-1110-2., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=617085&idb=0>.
6. Димитриенко Юрий Иванович. Тензорное исчисление : учеб. пособие для вузов. - М. : Высшая школа, 2001. - 575 с. : ил. - ISBN 5-06-004155-7 : 89.54., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: проектор, экран

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Жидков Александр Васильевич, кандидат технических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.