

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Дискретная математика

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.10 Дискретная математика относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает методы поиска, критического анализа и синтеза информации, основы системного подхода для решения поставленных задач УК-1.2: Умеет осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.3: Владеет основами критического анализа и синтеза информации, системного подхода для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает свойства теоретико-множественных операций и базовые типы комбинаторных объектов.  УК-1.2: Умеет сводить комбинаторные задачи к подсчету объектов базовых типов, выполнять преобразования между различными формами представления дискретных объектов.  УК-1.3: Владеет методами построения и преобразования различных представлений дискретных объектов.	Контрольная работа	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знает методы решения задач из области математических и естественных наук ОПК-1.2: Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3: Владеет навыками	ОПК-1.1: Знает основные понятия и важнейшие факты из теории множеств и комбинаторики.  ОПК-1.2: Умеет решать типовые комбинаторные задачи по теории множеств и комбинаторике.	Контрольная работа	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы

	теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности в области математических и естественных наук	ОПК-1.3: Владеет основными принципами подсчета, используемыми в комбинаторике.		
--	--	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>6</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Множества	9	4	4	8	1
Отношения	17	8	8	16	1
Мощность бесконечного множества	7	4	2	6	1
Комбинаторика	37	16	18	34	3
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	108	32	32	66	6

## Содержание разделов и тем дисциплины

1. Множества. Понятие множества. Конечные и бесконечные множества. Мощность конечного множества. Подмножество. Число подмножеств конечного множества. Характеристический вектор. Объединение, пересечение, разность, дополнение, симметрическая разность множеств. Основные тождества в алгебре множеств. Диаграмма Венна. Уравнения и системы уравнений в алгебре множеств. Декартово произведение множеств. Мультимножества.

2. Отношения. Бинарное отношение на множестве. Граф отношения. Свойства отношений. Отношение эквивалентности. Пример: сравнимость по модулю. Разбиение множества. Теорема о факторизации. Классы эквивалентности. Отношение порядка. Линейный и частичный порядок. Диаграмма Хассе. Отношения между множествами. Функциональные отношения. Инъекции, сюръекции, биекции. Многочастные отношения.

3. Мощность бесконечного множества. Количественное сравнение бесконечных множеств. Счетные и несчетные множества. Счетность множеств целых и рациональных чисел. Несчетность множества действительных. Континуум. Теорема Кантора.

4. Комбинаторика. Принцип Дирихле. Правила равенства, суммы и произведения. Упорядоченные и неупорядоченные наборы с повторениями и без повторений. Слова. Лексикографический порядок. Перестановки. Правило последовательного выбора. Размещения. Сочетания, Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Упорядоченные разбиения множеств. Полиномиальная теорема. Сочетания с повторениями. Формула включений-исключений. Неупорядоченные разбиения множеств. Число функций различных типов. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения натуральных чисел на заданное количество слагаемых и на произвольное количество слагаемых. Диаграмма Юнга. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения. Примеры: Ханойские башни и числа Фибоначчи. Формальные степенные ряды. Производящие функции. Решение линейных рекуррентных соотношений с помощью степенных рядов.

## 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Дискретная математика, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=1683>.

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции УК-1:

#### Вариант 1.

**Задача 1.** Преобразуйте данную формулу в эквивалентную ей, содержащую только операции объединения, пересечения и дополнения и не содержащую скобок:  $(B - (C - A)) \otimes \bar{C}$ .

**Задача 2.** Выяснить, равносильны ли системы условий:

$$\begin{cases} A \cup B \subseteq C; \\ C \cup B \subseteq A \cup D; \\ C \cup A \subseteq D \cup B; \\ AC \subseteq B; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B; \\ B \subseteq C \subseteq B \cup D. \end{cases}$$

**Задача 3.** Сколькими способами можно переставить буквы слова «здание», чтобы гласные шли в алфавитном порядке.

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

#### Контрольная работа 1

##### Вариант 1.

**Задача 1.** Задано универсальное множество  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и в нем подмножества

$A = \{x | x \leq 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 5, 6\}$ ,  $C = \{1, 3, 5, 6\}$ ,  $D = \{1, 2, 6, 7\}$ . Найдите множества:

$A \otimes B \bar{C} D$ ;  $C \bar{A} \times (D - B)$ ;  $2^{AC} - 2^{\bar{D}}$ .

**Задача 2.** Решить уравнение. Оценить число решений.

$$(A \otimes B) \otimes X = AB.$$

**Задача 3.** Дано отношение  $R$  на множестве  $A$ . Определите, является ли оно отношением эквивалентности или порядка. Для отношения эквивалентности найдите классы эквивалентности, для отношения порядка – минимальные и максимальные элементы.

$$xRy \Leftrightarrow x|2y;$$

а)  $A = \{2, 5, 6, 8, 9, 15\}$ ; б)  $A = \{3, 4, 5, 9, 12, 18\}$ ; в)  $A = \{1, 4, 6, 9, 10\}$ .

#### Контрольная работа 2

##### Вариант 1

**Задача 1.** Дано множество  $U$  из 7 элементов. Каким числом способов в нем можно выбрать три подмножества  $A$ ,  $B$ ,  $C$  так, чтобы выполнялись условия  $|A - B| = 1$ ,  $|(A \cap B) \cup C| = 2$ .

**Задача 2.** Найдите число слов длины 9 в алфавите  $\{a, b, c, d\}$ , в которые буква  $a$  входит 5 раз, а буква  $b$  1 раз.

**Задача 3.** Решите рекуррентное уравнение  $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$  с начальными условиями  $a_0 = -2$ ;  $a_1 = 4$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Приведены правильные решения большинства задач без существенных ошибок

Оценка	Критерии оценивания
не зачтено	Задачи не решены или в решении большинства задач допущены грубые ошибки

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1**

- Дан универс  $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$  и его подмножества  $A = \{x: 2 < x \leq 6\}$ ,  $B = \{x: x \text{ четно}\}$ ,  $C = \{x: x \geq 4\}$ ,  $D = \{1,2,4\}$ . Найдите множества  $A \cup B$ ,  $CD$ ,  $B \otimes C$ ,  $(A - B) \cup (C - D)$ ,  $\overline{A \cup B \cup C}$ ,  $2^A \cap 2^B$ ,  $2^D - 2^B$ .
- Постройте диаграмму Хассе
  - отношения делимости на множестве  $\{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}$ ;
  - отношения  $R: aRb \leftrightarrow a = b$  или  $a \leq b - 2$  на множестве  $\{1,2,\dots,8\}$ .
- Сколькими способами можно переставить буквы слова а) «периметр», чтобы «е» шла непосредственно после «р»? б) «поговорка», чтобы согласные шли в алфавитном порядке? в) «профессор», чтобы не менялся порядок гласных букв?
- Найдите решение рекуррентного уравнения при данных начальных значениях.
  - $x_n = 3x_{n-1} - 2$ ,  $x_0 = 3$ ;
  - $x_n = 2x_{n-1} + 15x_{n-2}$ ,  $x_0 = 3$ ,  $x_1 = 7$ ;
  - $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ .

**5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1**

1. Даны множества  $A = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ ,  $C = \{4,5,6\}$ ,  $D = \{b, c, d\}$ .  
Найдите  $|(A \times B) - (C \times D)|$ .
2. Найдите число отношений порядка на множестве  $\{a, b, c, d\}$ , у которых имеется наибольший элемент и два минимальных.
3. Сколько имеется слов длины 5 в алфавите  $\{a, b, c, d, e, f\}$ , в которых
  - 1) буква  $a$  встречается ровно 2 раза?
  - 2) буква  $a$  встречается не менее 3 раз?
  - 3) буква  $a$  встречается один раз, а буква  $b$  – дважды?
  - 4) буква  $a$  входит 2 раза, а остальные буквы различны?
4. Среди сотрудников фирмы семнадцать человек знают английский язык, десять – немецкий, семеро – французский. Три человека знают английский и французский, два – немецкий и французский, четверо – английский и немецкий.
  - а) Сколько человек работает в фирме, если каждый знает хотя бы один иностранный язык, а два человека знают все три языка?
  - б) Сколько сотрудников, не знающих ни одного иностранного языка, если в фирме работает тридцать человек и никто из них не знает всех трех языков?

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочётов.
отлично	Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочётами. Выполнены все задания в полном объеме.
очень хорошо	Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочётами.
хорошо	Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочётами.
удовлетворительно	Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие минимальных умений решения задач. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа.

### 5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Алгебра множеств. Прямое произведение множеств. Число подмножеств конечного множества.



2. Счетные и несчетные множества. Теорема Кантора.
3. Перестановки, размещения, сочетания.
4. Сочетания с повторениями (мультимножества).

#### 5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Алгебра множеств. Прямое произведение множеств. Число подмножеств конечного множества.
2. Отношение эквивалентности. Теорема о факторизации.
3. Отношение порядка. Теорема о конечных упорядоченных множествах. Диаграмма Хассе. Лексикографический порядок.
4. Функциональные отношения. Число инъекций, биекций и сюръекций для конечных множеств.
5. Счетные и несчетные множества. Теорема Кантора.
6. Перестановки, размещения, сочетания.
7. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Полиномиальная теорема.
8. Сочетания с повторениями (мультимножества).
9. Формула включений-исключений.
10. Число упорядоченных и неупорядоченных разбиений конечного множества.
11. Линейные рекуррентные уравнения.
12. Производящие функции.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Свободное владение основным и дополнительным материалом.
отлично	Свободное владение основным материалом с незначительными погрешностями.
очень хорошо	Достаточное владение основным материалом с незначительными погрешностями.
хорошо	Владение основным материалом с заметными погрешностями.
удовлетворительно	Знание важнейших определений и формулировок.
неудовлетворительно	Владение материалом недостаточно, необходима дополнительная подготовка.
плохо	Отсутствие владения материалом.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

### Основная литература:

1. Алексеев Владимир Евгеньевич. Дискретная математика : учебное пособие / В. Е. Алексеев ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2017. - 139 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=823847&idb=0>.
2. Алексеев Владимир Евгеньевич. Сборник задач по дискретной математике : задачник для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010300 "Фундам. информатика и информ. технологии", 010400 "Приклад. математика и информатика" / ННГУ. - Н. Новгород : [б. и.], 2012 (Тип. ННГУ). - 80 с. - 26.00., 50 экз.
3. Гашков С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / Гашков С. Б. - 3-е изд., испр. и доп. - Санкт-Петербург : Лань, 2025. - 520 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-49866-6., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=931274&idb=0>.

### Дополнительная литература:

1. Яблонский Сергей Всеволодович. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика". - Изд. 5-е, стер. - М. : Высшая школа, 2008. - 384 с. : ил. - ISBN 978-5-06-005943-4 : 574.00., 2 экз.
2. Гаврилов Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике / Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. - 3-е изд., перераб. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 416 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0477-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=665717&idb=0>.
3. Редькин Н. П. Дискретная математика / Редькин Н. П. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 264 с. - Рекомендовано УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика. Прикладная математика», 011000 «Механика. Прикладная математика». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-1093-8., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=665776&idb=0>.
4. Ландо С. К. Лекции о производящих функциях / Ландо С. К. - 3-е изд., испр. - Москва : МЦНМО, 2007. - 144 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-94057-042-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=711647&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=1683>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную

информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Сидоров Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.