

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

### **Рабочая программа дисциплины**

*Действительный анализ*

Уровень высшего образования  
*бакалавриат*

Направление подготовки / специальность

*01.03.01 Математика*

Направленность образовательной программы  
*Общий профиль*

Форма обучения  
*Очная*

Нижегород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части, Блока 1 Дисциплины (модули) Б1.О.23.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.0.23, «Действительный анализ», относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.01 Математика

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<b>ПК-4</b>  <i>Способен собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать передовой отечественный и международный опыт в математической и информационной области исследований</i>	<b>ПК-4.1.</b> Знает методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в математической и информационной области исследований	<b>Знать</b> методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в математической и информационной области исследований.	<i>собеседование</i>
	<b>ПК-4.2.</b> Умеет применять новые достижения в области научнотехнической информации	<b>Уметь</b> применять методы анализа научнотехнической информации.	<i>Контрольная работа</i>
	<b>ПК-4.3.</b> Владеет навыками решения задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач.	<b>Владеть</b> навыками решения задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач.	<i>задачи</i>

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма
--	-------------

	<b>обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>3 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
<b>в том числе</b>	
<b>контактная работа:</b>	<b>50</b>
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	32
- текущий контроль (КСР)	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>22</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>36</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
1. Возникновение действительного и функционального анализа как самостоятельного раздела математики; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.	20	2	4		6	2
2. Счетные множества и множества мощности континуума. Множества, алгебра множеств.	20	2	4		6	3
3. Построение меры Лебега на прямой.	26	2	4		6	3
4. Общее понятие аддитивной меры; лебеговское продолжение меры.	10	2	4		6	3
5. Измеримые функции их свойства; определение интеграла Лебега; класс суммируемых функций.		2	4		6	2
6. Предельный переход под знаком интеграла; связь интеграла Лебега с интегралом Римана; интеграл Стильтьеса.		2	4		6	3
7. Теорема Радона – Никодима; прямое произ-		2	4		6	3

ведение мер и теорема Фубини.						
8. Пространства $L_1, L_p$ ( $p > 1$ ); неравенства Гельдера и Минковского.	14	2	4		6	3
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Промежуточная аттестация - экзамен	36					
Итого	108	16	32		50	22

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен). Практическая подготовка предусматривает выполнение проекта, решение прикладной задачи кейса.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие	При решении	Продемон-	Продемон-	Продемон-	Продемон-	Продемон-

	минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	стрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	стрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	стрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	стрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	стрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне

не зачтено		«плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

Вопросы	Код формируемой компетенции
Понятие мощности множества. Теорема Кантора.	ПК-4
Счётные множества, их свойства.	ПК-4
Множества мощности континуум, их свойства.	ПК-4
Неравенства Гёльдера, Коши-Буняковского, Минковского.	ПК-4
Понятие меры. Продолжение меры по Лебегу.	ПК-4
Измеримые функции и их свойства, примеры.	ПК-4
Различные виды сходимости последовательностей измеримых функций.	ПК-4
Связь между различными видами сходимости последовательностей измеримых функций.	ПК-4
Интеграл Лебега от простых функций. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.	ПК-4
Общее понятие интеграла Лебега на множестве конечной меры, его основные свойства.	ПК-4
Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.	ПК-4
Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.	ПК-4
Функции ограниченной вариации и абсолютно-непрерывные. Пример непрерывной функции, не являющейся абсолютно-непрерывной.	ПК-4
Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл Лебега-Стилтьеса.	ПК-4
Пространства суммируемых функций.	ПК-4

### 5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ПК-4

#### Варианты контрольных работ:

##### Вариант 1.

- Докажите равенство  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .
- Установите взаимно однозначное соответствие между множествами:  $(-\infty; 0]$  и  $(-\infty; 0] \cup \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

- 3) Докажите, что при продолжении меры с кольца множеств  $R(S)$ , порожденного полукольцом  $S$ , по Лебегу (с помощью внешней меры) любое множество из самого кольца  $R(S)$  измеримо.
- 4) Найдите мощность множества всех конечных подмножеств полуинтервала  $[1; 5)$ .
- 5) Каковы строение и мера множества тех точек  $x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$  отрезка  $[0; 1]$ , у которых  $1 \leq x_n \leq 5, n = 1, 2, \dots$ ?
- 6) Докажите, что для любого действительного  $\varepsilon > 0$  и любого измеримого подмножества  $A$  из  $\mathbf{R}$  существуют замкнутое подмножество  $F$  из  $A$  и открытое множество  $G$ , содержащее  $A$ , меры которых отличаются меньше чем на  $\varepsilon$ .

### Вариант 2.

- 1) Докажите равенство  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .
- 2) Установите взаимно однозначное соответствие между множествами  $[0; 1)$  и  $[0; 1)^3$ .
- 3) Докажите, что если внешняя мера множества равна 0, то оно измеримо по Лебегу.
- 4) Найдите мощность множества  $\mathbf{Q}[x]$  всех многочленов с рациональными коэффициентами.
- 5) Каковы строение и мера множества тех точек  $x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$  отрезка  $[0; 1]$ , у которых  $4 \leq x_n \leq 7, n = 1, 2, \dots$ ?
- 6) Докажите, что у любого ограниченного множества, имеющего положительную меру Лебега, лежащего в  $\mathbf{R}$ , существует подмножество в 4 раза меньшей меры.

### Варианты экзамена:

#### Вариант 1

1. Сравнение мощностей. Примеры. Теорема Кантора – Бернштейна.
2. Теорема Рисса. Диаграмма связи различных видов сходимости.
3. Построить биекцию  $f: (0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ .

#### Вариант 2

1. Определение продолжения меры с полукольца множеств на порожденное им кольцо. Корректность этого определения и того, что это мера.
2. Теорема Фубини.

3. Вычислить интеграл Лебега  $\int_{(0,1]} f(x) d\mu$  от функции  $f(x) = \begin{cases} \arctg x, & x \in (0,1] \setminus \mathbf{Q}; \\ \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbf{Q} \cap (0,1] \end{cases}$

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 623 с. (93 экз. Ссылка на учетную карточку в электронном каталоге ФБ ННГУ: <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=93244> ).

#### б) дополнительная литература:

1. Дерр В.Я. Действительный анализ. М.: Юрайт, 2012. 464 с. (10 экз. Ссылка на учетную карточку в электронном каталоге ФБ ННГУ: <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=435229>).

2.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Действительный анализ Мех-Мат»,

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1516>

созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Автор: к.ф.-м.н., доц. Галкин О.Е.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой прикладной математики,

д.ф.-м.н., профессор Иванченко М.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.