

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Практикум по дополнительным главам математического анализа

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.29 Практикум по дополнительным главам математического анализа относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2: Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3: Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	УК-1.1: Знать: Различные методы и способы вычисления значений двойных, тройных, криволинейных и поверхностных интегралов. Формулы Грина, Стокса, Гаусса-Остроградского.  УК-1.2: Уметь: Решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным: 1. Вычислять с помощью повторных интегралов значения двойных и тройных интегралов 2. Применять двойные и тройные интегралы к решению геометрических задач 3. Вычислять криволинейные интегралы 1 и 2 рода 4. Вычислять поверхностные интегралы 1 и 2 рода 5. Записывать интегральные и дифференциальные соотношения на языке теории поля. Анализировать и осуществлять поиск современных технологий и	Контрольная работа	Зачёт: Задания

		<p>методик для своего направления</p> <p>УК-1.3: Владеть: Способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.</p>		
--	--	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>2</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>0</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>32</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>39</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
Тема 1. Кратные интегралы.	18		8	8	10
Тема 2. Криволинейные интегралы.	18		8	8	10
Тема 3. Поверхностные интегралы.	18		8	8	10
Тема 4. Векторный анализ.	17		8	8	9
Аттестация	0				

КСР	1			1	
Итого	72	0	32	33	39

### Содержание разделов и тем дисциплины

#### Тема 1.

Кратные интегралы. Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла. Определение и свойства двойного интеграла.

Приведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных. Геометрический смысл якобиана преобразования. Полярная замена координат.

Тройные и многократные интегралы. Приведение к повторным. Замена переменных. Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве.

Геометрические приложения двойных интегралов: объем бруса, площадь поверхности в случае явного и параметрического задания.

Приложения кратных интегралов к задачам механики: масса, статические моменты, центр масс, моменты инерции.

#### Тема 2.

Криволинейные интегралы. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл первого рода, его вычисление.

Криволинейный интеграл второго рода. Соотношение криволинейных интегралов. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.

Ориентация контура. Плоская односвязная область. Интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью формулы Грина.

Условия независимости интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

#### Тема 3.

Поверхностные интегралы. Поверхностный интеграл первого рода. Вычисление с помощью двойного интеграла.

Двусторонние поверхности. Поверхностный интеграл второго рода. Вычисление с помощью двойного интеграла. Связь поверхностных интегралов.

Поверхностно односвязная область. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от пути интегрирования.

Восстановление функции трех переменных по ее полному дифференциалу. Пространственно односвязная область. Формула Остроградского и ее геометрические приложения.

#### Тема 4.

Векторный анализ. Физические задачи, приводящие к понятиям скалярного и векторного полей.

Оператор Гамильтона. Градиент. Поле градиентов. Дивергенция векторного поля. Ротор. Поле роторов.

Циркуляция векторного поля. Поток векторного поля. Формулы Грина, Стокса и Остроградского-Гаусса в векторной форме.

Соленоидальные векторные поля. Условия соленоидальности поля, физический смысл дивергенции.

Потенциальные векторные поля. Критерий потенциальности векторного поля.

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Математический анализ, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=289>.

Иные учебно-методические материалы:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. М.: АСТ Астрель, 2010 .558 с. (252 экз.)
3. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу / М.И.Т.(в 3 т), 2003 – 472 с. (116 экз.)
4. Криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля : практикум / Гордеева О. В., Олюнина И. И., Сизова Н. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2020. - 30 с.

**5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции УК-1:**

### Вариант 1

1. Расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке  $\iint_D f(x, y) dx dy$ . Область  $D$  ограничена линиями  $y^2 + 2y - x = 0$ ;  $y + x = 4$
2. Вычислить  $\iint_D (x+y) dx dy$ , область  $D$  ограничена линией  $x^2 + y^2 = x + y$ .
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$
4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями  $z = 0$ ;  $z = 2x$ ;  $x + y = 3$ ;  $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$
5. Вычислить объём, ограниченный поверхностью  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$
6. Найти координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной кривой  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$
7. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования

$$\int_0^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} dy \int_0^{\sqrt{4R^2 - z^2 - y^2}} f(x, y, z) dx$$

### Вариант 3

1. Расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке  $\iint_D f(x, y) dx dy$ . Область  $D$  ограничена линиями  $x^2 + y^2 < 25$ ;  $3y < 4x$
2. Вычислить  $\iint_D xy dx dy$ , область  $D$  ограничена линиями  $xy = 1$ ;  $x + y = \frac{5}{2}$ .
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^5 = \frac{x^2 y^2}{c^4}$
4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями  $z = 0$ ;  $z = 1 - x^2$ ;  $y = 0$ ;  $y = 3 - x$
5. Вычислить объём, ограниченный поверхностью  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h}$
6. Найти координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной кривой  $r = a(1 + \cos \varphi)$ ;  $\varphi = 0$
7. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования

$$\int_{-1}^0 dx \int_0^{1+x} dy \int_0^{y-x} f(x, y, z) dz$$

### Вариант 2

1. Расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке  $\iint_D f(x, y) dx dy$ . Область  $D$  ограничена линиями  $x^2 - y^2 = 9$ ;  $4x = 5y$ ;  $y = 0$
2. Вычислить  $\iint_D (x+y) dx dy$ , область  $D$  ограничена линиями  $y^2 = 2x$ ;  $x + y = 4$ ;  $x + y = 12$ .
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $(x + y)^4 = 6xy^2$ .
4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;  $x + y = 2$ ;  $y = \sqrt{1 - z}$
5. Вычислить объём, ограниченный поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ;  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $z \geq 0$ ;  $0 < a < b$ )
6. Найти координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной кривой  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$  ( $x > 0$ ;  $y > 0$ )
7. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{2-x-y} f(x, y, z) dz$$

### Вариант 4

1. Расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке  $\iint_D f(x, y) dx dy$ . Область  $D$  ограничена линиями  $y = 0$ ;  $y = -1$ ;  $x = 1 + y$ ;  $x + 1 + y^2 = 0$
  2. Вычислить  $\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$
- где  $D: -1 < x < 1$ ;  $0 < y < 2$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ ;  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2$ ;  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ ;  $4\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$
  4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями  $z = 0$ ;  $z = 1 - y$ ;  $y = x^2$
  5. Вычислить объём, ограниченный поверхностью  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$
  6. Найти координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной кривой  $x = a(t - \sin t)$ ;  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ );  $y = 0$
  7. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$$

## Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи. Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач.
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения и базовые навыки. Имели место грубые ошибки.

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков.	При решении стандартных задач не	Имеется минимальный набор	Продемонстрированы базовые	Продемонстрированы базовые	Продемонстрированы навыки	Продемонстрирован творческий

	Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	подход к решению нестандартных задач
--	--	--	--	---	---	--	--------------------------------------

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции УК-1**



1. Найти циркуляцию вектора  $F = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$  вдоль контура  $L : \{(x, y, z) : 2x^2 - y^2 + z^2 = a^2; x = y\}$ , положительно ориентированного на правой стороне плоскости.
2.  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dx dz + xy dxdy$ , где  $S$  - внешняя поверхность конуса  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

1. Найти  $\int_L yz dx - 2y dy - 2z dz$   
 $L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, y^2 + x^2 = 2x, y \geq 0, z \geq 0\}$  от точки  $A(0,0,0)$  до точки  $B(2,0,2)$
2.  $\iint_S x dydz + y dz dx + z dx dy$ , где  $S$  - внутренняя сторона поверхности  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно».
не зачтено	Хотя бы одна компетенция, на формирование которых направлена дисциплина, сформирована на уровне «неудовлетворительно» или «плохо».

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Демидович Б. П. - 25-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 624 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-47148-5., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=865605&idb=0>.
2. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных : Учебное пособие. - 3-е изд. - Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2018. - 472 с. - ВО - Бакалавриат. - ISBN 978-5-9221-1706-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=741020&idb=0>.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления В 3-х тт. Том 3 : учебник для вузов / Фихтенгольц Г. М. - 14-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 656 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-47239-0., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=876886&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Гордеева О. В. Криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля : практикум / Гордеева О. В., Олюнина И. И., Сизова Н. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2020. - 30 с. - Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02

«Прикладная математика и информатика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=709669&idb=0>.

2. Ильин В. А. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I. Ч. 1. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I / Ильин В. А., Позняк Э. Г. - 7-е изд., стереот. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2021. - 648 с. - Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических специальностей и специальности "Прикладная математика". - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0902-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=781681&idb=0>.

3. Ильин В. А. Основы математического анализа : Учеб. для вузов. Ч. II. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II / Ильин В. А., Позняк Э. Г. - 5-е изд., стереот. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2022. - 464 с. - Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических специальностей и специальности "Прикладная математика". - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0537-8., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=802930&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://www.unn.ru/books/resources.html>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Кротов Николай Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент  
Сизова Наталья Алексеевна.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.