

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Теория представлений

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.05.02 Теория представлений относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-5: Обладает навыками преподавания математики и информатики в средней школе, специальных учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования	ПК-5.1: Знает уровень подготовки и психологию обучающихся при организации учебного процесса. ПК-5.2: Умеет применять методы анализа научно-технической информации ПК-5.3: Имеет практический опыт решения задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	ПК-5.1: Знать основные принципы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в области теории представлений, основы строгого доказательства утверждений, вывода следствий из полученных результатов  ПК-5.2: Уметь применять методы анализа информации к решению практических задач, связанных с исследованием свойств теории представлений конечных групп  ПК-5.3: Владеть техникой строгого доказательства теоретических утверждений, связанных с вопросами теории групп	Задачи	Экзамен: Контрольные вопросы

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	5

<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	24
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	24
- КСР	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>94</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Основные понятия теории представлений	46	8	8	16	30
Тема 2. Характеры комплексных представлений	46	8	8	16	30
Тема 3. Представления некоторых специальных групп	50	8	8	16	34
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	180	24	24	50	94

#### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Основные понятия теории представлений. Линейное представление группы. Степень представления. Эквивалентность представлений. G-модули. Подпредставление, факторпредставление. Прямая сумма представлений. Неразложимые и неприводимые представления.

Тема 2. Характеры комплексных представлений. Элементарные свойства комплексных характеров. Свойство ортогональности характеров неприводимых представлений. Таблица характеров.

Тема 3. Представления некоторых специальных групп. Представление группы  $GL(n, K)$ . Представление группы  $O(n)$ . Неприводимые представления групп  $S_3, S_4, A_4$ .

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "«Теория представлений 4 курс (математика)»"

(<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=4501>).

- открытый онлайн-курс MOOC "-" (-).

Иные учебно-методические материалы: Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

3. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

## **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

### **5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

#### **5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-5:**

1. Доказать, что все неприводимые комплексные представления конечной группы одномерны тогда и только тогда, когда она коммутативна.
2. Найти все неизоморфные одномерные комплексные представления групп  $S_3$  и  $A_4$ .
3. Пусть элемент  $g$  группы  $G$  имеет порядок  $k$  и  $\chi$  —  $n$ -мерный характер группы  $G$ . Доказать, что  $\chi(g)$  есть сумма  $n$  (не обязательно различных) корней степени  $k$  из 1.
4. Пусть  $\Phi$  — трехмерное комплексное представление группы  $\langle a \rangle_3$  и  $\chi_\Phi(g) = 0$  для некоторого  $g \in \langle a \rangle_3$ . Доказать, что  $\Phi$  эквивалентно регулярному представлению.
5. Пусть  $\chi$  — двумерный комплексный характер группы  $G = \langle a \rangle_3 \times \langle b \rangle_3$ . Доказать, что  $\chi(g) \neq 0$  для всякого  $g$  из  $G$ .

6. Пусть  $\chi$  — двумерный комплексный характер группы нечётного порядка. Доказать, что  $\chi(g) \neq 0$  для любого  $g$  из  $G$ .

7. Пусть  $\Phi$  —  $n$ -мерное комплексное представление конечной группы  $G$ . Доказать, что  $\chi_\Phi(g) = n$  тогда и только тогда, когда  $g$  принадлежит ядру представления  $\Phi$ .

8. Чему равно “среднее значение”

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$$

неприводимого характера неединичной конечной группы  $G$ ?

9. Доказать, что для конечной циклической группы  $A$ , группа характеров  $\bar{A}$  — конечная циклическая группа того же порядка.

1. Будет ли линейным представлением группы  $R$  в пространстве  $C(R)$  непрерывных функций на вещественной прямой отображение  $L$ , определяемое по формулам:

а)  $(L(t)f)(x) = f(x - t);$

б)  $(L(t)f)(x) = f(tx);$

в)  $(L(t)f)(x) = f(e^t x);$

д) подпространство нечётных функций;

е) линейная оболочка функций  $\sin x$  и  $\cos x$ ;

ж) подпространство многочленов от  $\cos x$  и  $\sin x$ ;

з) линейная оболочка функций  $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos px$ .

2. Найти подпространства пространства многочленов, инвариантные относительно представления  $L$  из задачи 1а).

3. Записать матрицами (в каком-либо базисе) ограничение линейного представления  $L$  из задачи 1 а) на подпространство многочленов степени  $\leq 2$ .

4. Записать матрицами (в каком-либо базисе) ограничение линейного представления  $L$  из задачи 1 а) на линейную оболочку функций  $\sin x$  и  $\cos x$ .

5. Доказать, что каждая из следующих формул определяет линейное представление группы  $A \in GL_n(F)$  в пространстве  $M_n(F)$

а)  $\Lambda(A)X = A \cdot X;$

б)  $Ad(A)X = A \cdot X \cdot A^{-1};$

в)  $\Phi(A)X = A \cdot X \cdot A^t$ .

6. Доказать, что линейное представление  $\Lambda$  из задачи 9, а) вполне приводимо и его инвариантные подпространства совпадают с левыми идеалами алгебры  $M_n(F)$ .

7. Доказать, что если  $\text{char } F$  не делит  $n$ , то линейное представление  $\text{Ad}$  из задачи 9, б) вполне приводимо и его нетривиальные инвариантные подпространства — пространство матриц с нулевым следом и пространство скалярных матриц.

8. Доказать, что если  $\text{char } F$  не равна 2, то линейное представление  $\Phi$  из задачи 9, в) вполне приводимо и его нетривиальные инвариантные подпространства — пространства симметрических и кососимметрических матриц.

9. Пусть  $V$  — двумерное пространство над полем  $F$ . Показать, что существуют представления  $\rho_1$  и  $\rho_2$  группы  $S_3$  на  $V$ , для которых в некотором базисе пространства  $V$  будут выполнены соотношения

$$\rho_1((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что эти представления изоморфны тогда и только тогда, когда  $\text{char } F \neq 3$ .

10. Пусть  $V$  — двумерное векторное пространство над полем  $F$ . Показать, что существуют два представления  $\rho_1$  и  $\rho_2$  группы  $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$  на  $V$ , для которых в некотором базисе пространства  $V$  будут выполнены соотношения

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Будут ли эти представления эквивалентны?

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Решены все задачи. Допущено минимальное количество ошибок
не зачтено	Не решено большинство задач

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой

	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1. Линейное представление группы. Степень представления. Эквивалентность представлений. G-модули. Примеры.
2. Подпредставление, факторпредставление. Прямая сумма представлений. Неразложимые и неприводимые представления. Примеры.
3. Разложение представление группы  $GL(n, K)$  на  $M(n, K)$  сопряжениями, разложение в прямую сумму неприводимых подпредставлений,  $K=R, C$ .
4. Представление группы  $GL(n, K)$  на  $M(n, K)$  левыми (правыми) сдвигами, разложение в прямую сумму неприводимых подпредставлений.
5. Представление группы  $O(n)$  на  $M(n, R)$  сопряжениями, разложение в прямую сумму неприводимых подпредставлений.
6. Унитарные представления. Эквивалентность комплексного представления конечной группы унитарному представлению.
7. Теорема Машке.
8. Лемма Шура.
9. Характер представления. Элементарные свойства комплексных характеров.
10. Свойство ортогональности характеров неприводимых представлений.

11. Кратность неприводимого G-модуля в представлении. Взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных комплексных представлений и характерами
12. Скалярный квадрат характера.
13. Центральные функции на группе и характеры неприводимых представлений.
14. Разложение регулярного представления группы на неприводимые
15. Представления конечных абелевых групп.
16. Разложение естественного представления 2-транзитивной группы на неприводимые.
17. Таблица характеров. Второе соотношение ортогональности для характеров.
18. Неприводимые представления групп  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $A_4$ .
19. Тензорное произведение представлений. Кольцо характеров.

### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

Основная литература:

1. Холл Маршалл. Теория групп : пер. с англ. Н. В. Дюмина, З. П. Жилинской ; под ред. Л. А. Калужнина. - М. : Изд-во иностр. лит., 1962. - 468 с. - 2.15., 4 экз.
2. Серр Жан-Пьер. Линейные представления конечных групп / пер. с фр. В. А. Исаковских ; под ред. Ю. И. Манина. - М. : Мир, 1970. - 132 с. : черт. - 0.38., 8 экз.

Дополнительная литература:

1. Кэртис Чарльз. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / пер. с англ. Б. Н. Гарштейн [и др.] ; под ред. С. Д. Бермана. - М. : Наука, 1969. - 668 с. - 3.16., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

-

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Кузнецов Михаил Иванович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.