

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
президиумом Ученого совета ННГУ
от 14.12.2021 г. протокол № 4

Рабочая программа дисциплины

Случайные процессы

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

специалитет

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.05.01 «Фундаментальные математика и механика»

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород
2022 год

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.32 Случайные процессы относится к обязательной части ООП специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1. Знать методы критического анализа проблемных ситуаций.	Уметь воспринимать, обобщать и анализировать информацию; Уметь логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь. Владеть математическим мышлением, математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры.	<i>Собеседование</i>
ОПК-1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.1. Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук. ОПК-1.2. Умеет формулировать, анализировать и решать профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук. ОПК-1.3. Имеет практический опыт постановки и решения актуальных задач математики и механики.	Знать основные понятия теории случайных процессов. Знать основные свойства и классификацию потоков событий. Владеть навыками вычисления вероятности состояний для цепи Маркова.	<i>Собеседование</i>
			<i>Задачи</i>
			<i>Задачи</i>
ОПК-2. Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1. Знает основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования. ОПК-2.2. Умеет осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на ос-	Уметь формулировать содержательные проблемы в форме задач теории случайных процессов. Уметь описывать марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.	<i>Собеседование</i>
			<i>Задачи</i>

	нове теоретических знаний в области математических и компьютерных наук.		
ПК-4. Имеет опыт самостоятельного проведения работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследования	<p>ПК-4.1. Знает особенности поиска научно-технической информации в различных источниках, методов и технологий её обработки и анализа, а также способов представления.</p> <p>ПК-4.2. Умеет организовать целенаправленный поиск информации в различных источниках, выбирать методы и технологии её обработки, анализа и представления, исходя из поставленной задачи.</p> <p>ПК-4.3. Владеет навыками поиска и анализа научно-технической информации в различных источниках для решения стандартных профессиональных задач, а также опыт публичного представления научных результатов.</p>	<p>Знать предельные теоремы теории потоков.</p> <p>Уметь осуществлять преобразование случайных процессов.</p> <p>Владеть навыками определения стационарного режима для цепи Маркова.</p>	<i>Собеседование</i>

3. Структура и содержание дисциплины «Случайные процессы»

3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	3 з.е.
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	49
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	16
- Контроль самостоятельной работы (КСР)	2
самостоятельная работа	59
Промежуточная аттестация – зачет	

Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе	
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них	Самостоятельная работа студента часы

		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Лабораторные работы		Всего контактных часов	СРС		
Основные понятия теории случайных процессов.	12	4	2			6	6		
Потоки событий, их свойства и классификация. Некоторые свойства потоков Пальма. Потоки Эрланга.	14	4	2			6	8		
Предельные теоремы теории потоков.	14	4	2			6	8		
Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова). Граф состояний, классификация состояний, вероятности состояний.	18	6	2			8	10		
Стационарный режим для цепи Маркова.	13	4	2			6	7		
Описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения Колмогорова.	14	4	2			6	8		
Однородные марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения для предельных вероятностей.	12	4	2			6	6		
Преобразования случайных процессов	10	2	2			4	6		
Всего	107	32	16			48	59		
В т.ч. текущий контроль	1		1						
Промежуточная аттестация. Зачет									

Образовательные технологии

При проведении практических занятий по дисциплине «Случайные процессы», а также при выполнении студентами домашних, самостоятельных и контрольных работ, используются учебно-методические пособия и практикумы, разработанные автором программы. Самостоятельная работа обучающихся реализуется в следующих формах: выполнение домашних заданий по дисциплине; самостоятельное изучение некоторых теоретических вопросов.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

а. Виды самостоятельной работы студентов

- Ознакомление с теоретическим материалом по источникам, указанным в списке литературы.
- Ответы на вопросы самоконтроля.

в. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

- Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. – М.: Физматлит, 2012.
- Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000.
- ВВЕДЕНИЕ В ОБЩИЕ ЦЕПИ МАРКОВА. Авторы: Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В., Федоткин М.А.: Учебно–методическое пособие – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 51 с.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

- 5.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования.

Карта компетенций для оценивания умений, знаний и навыков

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)						
	«плохо»	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«очень хорошо»	«отлично»	«превосходно»
Умения <i>УК-1; ОПК-1; ОПК-2; ПК-4</i>	отсутствует способность решения стандартных задач	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	способность решения основных стандартных задач с негрубыми ошибками	способность решения всех стандартных задач с незначительными погрешностями	способность решения всех стандартных задач без ошибок и погрешностей	способность решения стандартных и некоторых нестандартных задач	способность решения стандартных задач и широкого круга нестандартных задач
Знания <i>УК-1; ОПК-</i>	отсутствие знаний	наличие грубых ошибок в	знание основного мате-	знание основного мате-	знание основного мате-	знание основного мате-	знание основного и до-

<i>1; ОПК-2; ПК-4</i>	материала	основном материале	риала с рядом негрубых ошибок	риалом с рядом заметных погрешностей	риала с незначительными погрешностями	риала без ошибок и погрешностей	полным материалом без ошибок и погрешностей
Навыки <i>УК-1; ОПК-1; ОПК-2; ПК-4</i>	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех основных навыков, продемонстрированных в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных и нестандартных ситуациях
Личностные качества <i>УК-1; ОПК-1; ОПК-2; ПК-4</i>	соответствующие личностные качества не сформированы	сформированность личностных качеств недостаточный для достижения основных целей обучения	сформированность личностных качеств минимально необходимая для достижения основных целей обучения	личностные качества в целом сформированы	сформированные личностные качества достаточны для достижения целей обучения	Личностные качества сформированы на высоком уровне	Сформированность личностных качеств выше обязательных требований
Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных заданий	0 – 20 %	20 – 50 %	50 – 70 %	70-80 %	80 – 90 %	90 – 99 %	100%

5.2. Описание шкал оценивания

Для оценивания результатов учебной деятельности студентов при изучении дисциплины «Случайные процессы» используется балльная система (см. п. 6.3). По результатам итоговой аттестации проставляются оценки «За-

чено» (соответствует уровням оценки компетенций «удовлетворительно» и выше) и «Не зачтено» (соответствует уровням оценки компетенций «плохо» и «неудовлетворительно»).

На зачёте проверяется в основном способность решения практических задач.

Зачет.

Зачтено	выполнены задания тестирования, контрольных работ за семестр
Не зачтено	не выполнены задания тестирования и контрольных работ за семестр

5.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций.

Для оценивания результатов обучения в виде знаний умений и навыков используются следующие процедуры и технологии:

- тестирование;
- письменные ответы на вопросы;
- устные ответы на вопросы преподавателя;
- индивидуальное собеседование на итоговом зачете.

Критерий оценивания результатов тестирования

<i>Баллы, %</i>	<i>Оценка</i>
96-100	Отлично
71-95	Хорошо
51-70	Удовлетворительно
0-50	Неудовлетворительно

Критерии оценок выполнения контрольной работы (каждая задача оценивается в 1 балл)

Решена полностью	1
Решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами	0,5
Решение неверное, решение отсутствует	0

Суммарная оценка выполнения контрольной работы

Количество баллов	Оценка
5	Отлично
4,5	Очень хорошо
4 - 3,5	Хорошо
3 - 2,5	Удовлетворительно
2 - 1,5	Неудовлетворительно
1 - 0	Плохо

5.4. Типовые вопросы и задачи для оценки результатов формирования компетенций.

Примеры тестовых вопросов:

1. Тип – множественный выбор.

Пусть E есть статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Отметьте верные утверждения?

- Случайный процесс есть однопараметрическое семейство $\{\xi(t) : t \in T\}$ случайных элементов, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$. (+)
- Случайный процесс есть однопараметрическое семейство $\{\xi(t) : t \in T\}$ случайных элементов, заданных на разных вероятностных пространствах $(\Omega_t, \mathfrak{F}_t, P_t(\cdot)), t \in T$.
- Параметр t для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ может меняться непрерывно. (+)
- Параметр t для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ может меняться дискретно. (+)

2. Тип – одиночный выбор.

Пусть E есть статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Укажите ошибочное высказывание?

- Поточечное задание случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ заключается в определении при каждом $\omega \in \Omega$ и $t \in T$ отображения $\xi(\omega, t) : \Omega \times T \rightarrow X$, где X есть пространство состояний составного эксперимента E .
- Если $\{\xi(t) : t \in T\}$ является случайным процессом, то при каждом $t \in T$ имеет место свойство измеримости вида $\{\omega : \xi(\omega, t) \in B\} \in \mathfrak{F}$ для всех $B \in \mathfrak{R}$, где σ -алгебра \mathfrak{R} суть подмножества множества X .
- Если $\{\xi(t) : t \in T\}$ является случайным процессом, то значение $\xi(\omega, t) \in X$ есть состояние составного эксперимента E в момент t или состояние эксперимента E_t .
- Пусть $\{\xi(t) : t \in T\}$ является случайным процессом и (X, \mathfrak{R}) есть измеримое пространство его состояний. Тогда семейство $\{P(\{\omega : \xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2, \dots, \xi(t_n) \in B_n\}) : t_1, t_2, \dots, t_n \in T; B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{R}\}$ не является его конечномерным распределением. (+)

3. Тип – множественный выбор.

Пусть E есть статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Укажите верные высказывания?

- Случайный процесс $\{\xi(t) : t \in T\}$ может быть дискретным по времени и по пространству. (+)
- Если для каждого $n = 1, 2, \dots$ и любых моментов $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ независимы в совокупности, то процесс называется с независимыми приращениями.
- Случайный процесс $\{\xi(t) : t \in T\}$ может быть дискретным по времени и непрерывным по пространству. (+)
- Если для каждого $n = 1, 2, \dots$ и для любых $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ независимы в совокупности, то процесс называется с независимыми сечениями.

4. Тип – ввод значения.

Пусть случайный процесс $\{\xi(t) : -\infty < t < +\infty\}$ задается соотношением $\xi(\omega, t) = \eta(\omega) \sin(bt)$, где $\eta(\omega)$ является одномерной случайной величиной, $M\eta = a$, $D\eta = \sigma^2$ и b, a, σ являются постоянными величинами. Вычислить при $a = b = \sigma = 1$, $t = \pi/2$, $t_1 = 3\pi/2$ и $t_2 = 5\pi/2$ следующие характеристики этого процесса: 1) $M(\xi(t))$; 2) $D(\xi(t))$; 3) $\text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2))$.

Примечание: ответ следует вводить в виде знакового числа (напр., -7)

- #Ответ1# $M(\xi(t))$ =#1#
- #Ответ2# $D(\xi(t))$ =#1#
- #Ответ3# $\text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2))$ =# -1#

5. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \dots\}$ состояний. Укажите верные высказывания?

- Схема независимых испытаний Бернулли является цепью Маркова. (+)
- Схема независимых испытаний Бернулли не является однородной цепью Маркова.
- Если условные вероятности $P(\{\omega : \xi_{n+1} = j\} | \{\omega : \xi_n = i\})$ не зависят от n , то схема Маркова называется однородной. (+)

- Пусть вероятности

$P(\{\omega: \xi_{n+1}=j\}|\{\omega: \xi_0=a_0, \xi_1=a_1, \dots, \xi_{n-1}=a_{n-1}, \xi_n=a_n\})=p_j$ для всех $n, a_0, a_1, \dots, a_n, j \in \{0, 1, \dots\}$. Тогда схема Маркова является однородной. (+)

6. Тип – одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n=0, 1, \dots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X=\{0, 1, \dots\}$ состояний. Отметьте ошибочное утверждение?

- Если $\{\xi_n; n=0, 1, \dots\}$ есть последовательность независимых случайных величин и при каждом $n=0, 1, \dots$ случайная величина $\eta_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$, то последовательность $\{\eta_n; n=0, 1, \dots\}$ является неоднородной марковской цепью. (+)
- Если $\{\xi_n; n=0, 1, \dots\}$ есть последовательность независимых случайных величин и при каждом $n=0, 1, \dots$ случайная величина $\eta_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$, то последовательность $\{\eta_n; n=0, 1, \dots\}$ является однородной марковской цепью.
- Пусть условные вероятности $P(\{\omega: \xi_{n+1}=j\}|\{\omega: \xi_n=i\})=p_{i,j}$ и $P(\{\omega: \xi_0=i\})=p_i$ для всех $i, j=0, 1, \dots$. Тогда $p_i \geq 0, p_{i,j} \geq 0, \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1, \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$.
- Однородная цепь Маркова может быть задана множествами $X=\{0, 1, \dots\}, T=\{0, 1, \dots\}$, начальным распределением $\{p_i; i=0, 1, \dots\}$ и условными вероятностями перехода за одно испытание следующего вида $P(\{\omega: \xi_{n+1}=j\}|\{\omega: \xi_n=i\})=p_{i,j}, i, j=0, 1, \dots$

7. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n=0, 1, \dots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X=\{0, 1, \dots\}$ состояний. Укажите верные высказывания?

- Пусть $p_j^{(n)} = P(\{\omega: \xi_n=j\})$ и $P(\{\omega: \xi_{n+1}=j\}|\{\omega: \xi_n=i\})=p_{i,j}$ для всех $n, j, i=0, 1, \dots$. Тогда $p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(n-1)} p_{i,j}$.
- Если $p_j^{(n)} = P(\{\omega: \xi_n=j\})$ и $P(\{\omega: \xi_{n+1}=j\}|\{\omega: \xi_n=i\})=p_{i,j}$ для всех $n=1, 2, \dots$ и $j, i=0, 1, \dots$, то $p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(n-1)} p_{i,j}$. (+)
- Пусть $p_j^{(n)} = P(\{\omega: \xi_n=j\})$, $p^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots)$, $P(\{\omega: \xi_{n+1}=j\}|\{\omega: \xi_n=i\})=p_{i,j}$ для всех $n, j, i=0, 1, \dots$

Тогда $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi^n$, где Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова.

- Если $p_j^{(n)} = P(\{\omega: \xi_n = j\})$,
 $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots)$, $P(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ для всех $n, j, i = 0, 1, \dots$

Тогда $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi^n$, где Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова. (+)

8. Тип – одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть однородная цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \dots\}$ состояний. Укажите ошибочное утверждение?

- Пусть при $r = 1, 2, \dots$ условная вероятность $P(\{\omega: \xi_{k+r} = j\} | \{\omega: \xi_k = i\}) = p_{i,j}(k, r)$, где $k, i, j = 0, 1, \dots$. Тогда переходная вероятность $p_{i,j}(k, r)$ схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k -м испытании к состоянию с номером j в $(k+r)$ -м испытании не зависит от k и обозначается через $p_{i,j}(r)$.
- Если условная вероятность $P(\{\omega: \xi_{k+r} = j\} | \{\omega: \xi_k = i\}) = p_{i,j}(k, r)$, где $k, r, i, j = 0, 1, \dots$, то переходная вероятность $p_{i,j}(k, r)$ схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k -м испытании к состоянию с номером j в $(k+r)$ -м испытании не зависит от k и обозначается через $p_{i,j}(r)$. (+)
- Если условная вероятность $P(\{\omega: \xi_{k+r} = j\} | \{\omega: \xi_k = i\}) = p_{i,j}(r)$, то имеет место равенство $p_{i,j}(k+r) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{i,m}(k) p_{m,j}(r)$, где $r = 1, 2, \dots$ и $k, i, j = 0, 1, \dots$
- Пусть Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова и $p_{i,j}(r)$ переходная вероятность однородной схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k -м испытании в состояние с номером j в $(k+r)$ -м испытании. Тогда имеет место соотношение $\Pi^n = \|p_{i,j}(n)\|_{i,j=0,1,\dots'}$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

9. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть однородная цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \dots\}$ состояний. Отметьте верные утверждения?

- Пусть $p_j^{(n)} = P(\{\omega: \xi_n = j\})$, $p_i = P(\{\omega: \xi_0 = i\})$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность однородной схемы Маркова за $n \geq 1$ шагов от состояния с

номером i в состояние с номером j для всех $i, j = 0, 1, \dots$. Тогда

$$p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n), j = 0, 1, \dots \quad (+)$$

- Если $p_j^{(n)} = P(\{\omega: \xi_n = j\})$, $p_i = P(\{\omega: \xi_0 = i\})$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность однородной схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j для всех $n, j, i = 0, 1, \dots$, то

$$p_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n), j = 0, 1, \dots$$

- Если $p_j^{(n)} = P(\{\omega: \xi_n = j\})$, $p_i = P(\{\omega: \xi_0 = i\})$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в

состояние с номером j , то $p_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n+1)$, где для всех $n, j, i = 0, 1, \dots$ (+)

- Пусть

$p_j^{(n)} = P(\{\omega: \xi_n = j\})$, $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots)$, $p_i = P(\{\omega: \xi_0 = i\})$, $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots)$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность схемы Маркова за $n = 1, 2, \dots$ шагов от состояния с номером i в состояние с номером j для всех $i, j = 0, 1, \dots$

Тогда

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p} \| p_{i,j}(n) \|_{i,j=0,1,\dots} \quad (+)$$

10. Тип – одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \dots\}$ состояний, для которой $p_{i,j}(n)$ есть переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j . Укажите справедливое высказывание?

- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такое целое число $n_1 \geq 0$, что $p_{i,j}(n_1) > 0$.
- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такое целое число $n_1 \geq 0$, что $p_{i,j}(n_1) > 0$.
- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такие целые числа $n_1 \geq 0$ и $n_2 \geq 0$, что одновременно $p_{i,j}(n_1) > 0$ и $p_{j,i}(n_2) > 0$. (+)
- Состояние с номером i назовём несущественным, если существует такое состояние с номером j и натуральное число r , что $p_{i,j}(r) > 0$.

11. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \dots\}$ состояний, для которой $p_{i,j}(n)$ есть переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j . Укажите верные утверждения?

- Состояние с номером i назовём несущественным, если существует такое состояние с номером j и натуральное число r , что $p_{i,j}(r) > 0$, однако $p_{j,i}(n) = 0$ для всех $n \geq 1$. (+)
- Период $d(i)$ состояния с номером i есть наименьшее общее кратное всех натуральных чисел r , для которых $p_{i,i}(r) > 0$.
- Период $d(i)$ состояния с номером i есть наибольший общий делитель всех натуральных чисел r , для которых $p_{i,i}(r) > 0$. (+)
- Пусть период $d(i)$ любого состояния с номером i меньше двух и каждое состояние цепи Маркова может быть достигнуто из любого другого её состояния. Тогда предел $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(n)$ существует для каждой упорядоченной пары (i, j) и не зависит от i . (+)

12. Тип – ввод значения.

Пусть семейство $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ является цепью Маркова, для которой пространство состояний имеет вид $X = \{0, 1, 2\}$ и вероятности перехода за одно испытание равны:

$p_{0,0} = p_{0,1} = p_{1,0} = p_{1,1} = 1/2, p_{2,0} = 1, p_{0,2} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = 0$. Вычислить следующие предельные вероятности: 1) p_0^* ; 2) p_1^* ; 3) p_2^* .

Примечание: ответ следует вводить в виде целого числа или несократимой дроби (m/n) .

- #Ответ1# $p_0^* = 1/2$ #
- #Ответ2# $p_1^* = 1/2$ #
- #Ответ3# $p_2^* = 0$ #

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Случайные процессы»

а) основная литература:

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. 35 экз.
2. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. — М.: Физматлит, 2012. 196 экз.

3. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов.-М.: Наука, 1965. 46 экз.

б) дополнительная литература:

1. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов.- М.: Наука, 1996. 8 экз.
2. Свешников А.А. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. – М.: Наука, 1970. 45 экз.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы.

1. Интернет-ресурсы электронного портала ИИТММ
<http://www.itmm.unn.ru/studentam/uchebno-metodicheskie-materialy/>
2. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Лобачевского
<http://www.unn.ru/books/resources.html>
3. Общероссийский математический интернет-портал <http://mathnet.ru>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения аудиторных занятий требуется аудитория, оснащенная партами, стульями, учебной доской, мелом. Учебная и научная литература, учебно-методические материалы, представленные в библиотечном фонде, в электронных библиотеках и на кафедре математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по специальности 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика» (специализация «Фундаментальная механика и приложения»).

Автор _____ Е.В. Пройдакова

Заведующий кафедрой _____ Р.Г. Стронгин

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 01.12.2021 года, протокол № 2.