

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Линейная алгебра

---

Уровень высшего образования

Специалитет

---

Направление подготовки / специальность

01.05.01 - Фундаментальные математика и механика

---

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.12 Линейная алгебра относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук ОПК-1.2: Умеет формулировать, анализировать и решать профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук ОПК-1.3: Имеет практический опыт постановки и решения актуальных задач математики и механики	ОПК-1.1: Знает основные понятия алгебры, постановки стандартных задач и методы их решения, основы строгого доказательства утверждений, формулировки результатов, вывода следствий из полученного результата.  ОПК-1.2: Умеет анализировать и решать стандартные алгебраические задачи с применением современного математического аппарата.  ОПК-1.3: Владеет навыками применения основных вычислительных алгоритмов алгебры для решения прикладных задач с использованием современных компьютерных технологий.	Контрольная работа	Экзамен: Контрольные вопросы Задачи

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>5</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>48</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>48</b>
- КСР	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>46</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Векторное (линейное) пространство	34	12	12	24	10
Линейные отображения	36	12	12	24	12
Билинейные и квадратичные формы	36	12	12	24	12
Евклидово (унитарное) пространство	36	12	12	24	12
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	180	48	48	98	46

#### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Векторное (линейное) пространство. Линейная зависимость, базис, размерность. Подпространства, сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Координаты, матрица перехода от одного базиса к другому.
2. Линейные отображения (операторы), действия с ними, их матрицы. Ядро, образ, ранг, дефект линейного отображения. Собственные числа и векторы. Характеристический многочлен оператора (матрицы).
3. Билинейные и квадратичные формы. Изменение матрицы квадратичной функции при изменении базиса. Метод Лагранжа приведения симметричной билинейной формы к каноническому виду. Закон инерции.

4. Евклидово (унитарное) пространство. Скалярное произведение, свойства. Ортогональные векторы. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- открытый онлайн-курс МООС "Алгебра 1 курс (математика, ФММ, МиММ)" (<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4485>).

Иные учебно-методические материалы: 1. Кузнецов М.И., Любимцев О.В., Муляр О.А. НАЧАЛА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ЧАСТЬ 1: Учебно-методическое пособие. // Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. — 35 с.

2. Кузнецов М.И., Любимцев О.В., Муляр О.А. НАЧАЛА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ЧАСТЬ 2: Учебно-методическое пособие. // Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2024. — 41 с.

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:**

### Вариант 1

1. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы  $a_1 = \{1, -1, 2\}$ ,  $a_2 = \{-2, -1, 0\}$ ,  $a_3 = \{0, 1, 3\}$  в векторы  $b_1 = \{1, -7, 5\}$ ,  $b_2 = \{-5, 7, -4\}$ ,  $b_3 = \{1, -15, 11\}$  соответственно, в том же базисе, в котором заданы векторы  $a_i$  и  $b_i$ .
2. Матрица оператора  $\varphi$  в базисе  $a_1 = \{2, 1\}$ ,  $a_2 = \{-1, 1\}$  равна  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , матрица оператора  $\psi$  в базисе  $b_1 = \{-1, 3\}$ ,  $b_2 = \{-2, 0\}$  равна  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу оператора  $\varphi^{-1} + \psi$  в базисе, в котором даны координаты  $a_i$  и  $b_i$ .
3. Найти собственные векторы линейного оператора заданного матрицей  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Вариант 2

1. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы  $a_1 = \{-1, -2, 2\}$ ,  $a_2 = \{-2, -1, 1\}$ ,  $a_3 = \{0, -1, 3\}$  в векторы  $b_1 = \{1, -7, 5\}$ ,  $b_2 = \{-5, 7, -4\}$ ,  $b_3 = \{1, -15, 11\}$  соответственно, в том же базисе, в котором заданы векторы  $a_i$  и  $b_i$ .

$$b_1 = \{-4, 0, 1\}, b_2 = \{-5, 3, -1\}, b_3 = \{-1, -9, 7\}$$

соответственно, в том же базисе, в котором заданы векторы  $a_i$  и  $b_i$ .

2. Матрица оператора  $\varphi$  в базисе  $a_1 = \{0, 1\}$ ,  $a_2 = \{-1, 1\}$  равна  $A =$

$$\text{оператора } \psi \text{ в базисе } b_1 = \{-1, -3\}, b_2 = \{-2, 0\} \text{ равна } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

оператора  $\varphi \circ \psi$  в базисе, в котором даны координаты  $a_i$  и  $b_i$ .

3. Найти собственные векторы линейного оператора заданного матрицей

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Решена полностью с применением оригинальных методов решения.
отлично	Решена полностью без недочетов.
очень хорошо	Решена полностью с незначительными недочетами.
хорошо	Решена с одной ошибкой.
удовлетворительно	Решена с двумя ошибками и мелкими недочетами.
неудовлетворительно	Решено половина контрольной работы.
плохо	Не решено ни одной задачи.

#### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

##### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой

	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Аксиомы векторного пространства. Следствия из аксиом. Примеры векторных пространств. Подпространства, примеры.

Линейная комбинация, линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость, свойства.

Эквивалентные определения базиса, примеры. Конечномерные, бесконечномерные пространства.

Лемма о линейно независимой системе. Теорема о количестве векторов в базисе, размерность.

Теорема о дополнении до базиса. Свойство бесконечномерных пространств.

Теорема о монотонности размерности.

Координаты вектора в базисе, матрица перехода, ее невырожденность, формула изменения координат при переходе к новому базису.

База системы векторов и ранг системы векторов.

Сумма и пересечение подпространств, линейная оболочка объединения.

Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств.

Прямая сумма. Критерий прямой суммы.

Линейные отображения векторных пространств, свойства, примеры. Матрица линейного отображения в базисах. Матричная запись. Формула преобразования матрицы линейного отображения при замене базисов.

Матрица линейного оператора. Матричная запись. Координаты образа вектора. Формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса.

Теорема о задании линейного отображения на базисе. Теорема о соответствии между линейными отображениями и матрицами.



Ядро и образ линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте.

Сумма линейных отображений, произведение на число, композиция. Их матрицы.

Собственные векторы. Собственные значения линейного оператора и корни характеристического многочлена. Инвариантность характеристического многочлена.

Билинейные формы. Однозначность определения на базисе. Матрица билинейной формы. Закон изменения матрицы при переходе к другому базису.

Симметрические, кососимметрические формы. Квадратичная форма, поляризация квадратичной формы, канонический вид.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.

Закон инерции квадратичных форм над  $\mathbb{R}$ .

Евклидовы пространства, скалярное произведение, свойства. Длина вектора, неравенство Коши-Буняковского, следствия, угол между векторами.

Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в о.н.б. Матрица Грама.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно».
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично».
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо».
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо».
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно».
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо».
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо».

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Задача 1. Найти матрицу перехода от базиса  $v_1=(1, 1, 1)$ ,  $v_2=(1, 1, 0)$ ,  $v_3=(1, 1, 1)$  к базису  $u_1=(1, 2, 0)$ ,  $u_2=(2, 2, 1)$ ,  $u_3=(2, 1, 2)$ .

Задача 2. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов  $\langle(1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\rangle$  и  $\langle(-1,-1,1,0),(2,2,0,1)\rangle$ .

Задача 3. Выяснить является ли преобразование пространства  $R^3$  линейным. Найти его матрицу в базисе  $e_1=(1,1,1)$ ,  $e_2=(-1,1,1)$ ,  $e_3=(1,2,3)$ :

А)  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$ .

12

Б)  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1x_2, x_3)$ .

Задача 4. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы  $v_1=(0, 1, 1)$ ,  $v_2=(0, 1, 1)$ ,  $v_3=(1, 1, 0)$  в векторы  $u_1=(4, 4, 5)$ ,  $u_2=(5, 3, 4)$ ,  $u_3=(3, 5, 4)$ .

Задача 5. Линейный оператор  $F$  задан в базисе  $\{v_1=(1, 1, 0), v_2=(0, 1, 1), v_3=(1, 1, 1)\}$  формулой  $F(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3) = 2a_1v_1+2a_2v_2-2a_3v_3$ , где  $a_1, a_2, a_3$  – координаты вектора. Найти матрицу оператора  $F$  в базисе  $\{u_1, u_2, u_3\}$  и значение оператора  $F$  на векторе  $u_1+u_2+u_3$ , где  $u_1=(1, 1, 1)$ ,  $u_2=(0, 1, 1)$ ,  $u_3=(0, 0, 1)$ .

Задача 6. Матрица оператора  $\varphi$  в базисе  $a_1=(1, 1)$ ,  $a_2=(1, 0)$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

(1 0)

матрица оператора  $\psi$  в базисе  $b_1=(-1, -1)$ ,  $b_2=(1, 2)$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Найти матрицу оператора  $\varphi + \psi$  в базисе  $\{b_1, b_2\}$ .

Задача 7. Найти базис ядра и образа оператора, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Найти собственные значения и собственные векторы линейного

матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Задача 9. Является ли диагонализируемым линейный оператор над  $\mathbb{R}$  над

базисе матрицей  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Задача 10. Найти жорданову форму матрицы  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Задача 11. Найти нормальный вид в области вещественных преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Задача 12. Найти канонический вид и ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду (приведение к главным осям).

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.
отлично	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.

Оценка	Критерии оценивания
очень хорошо	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
хорошо	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.
удовлетворительно	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продemonстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Курош Александр Геннадиевич. Курс высшей алгебры : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Приклад. математика". - Изд. 18-е, стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2011. - 432 с. : ил. - (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0521-3 : 800.03., 105 экз.
2. Проскуряков Игорь Владимирович. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие. - Изд. 13-е, стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2010. - 480 с. - (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература) (Классические задачки и практикумы). - ISBN 978-5-8114-0707-1 : 537.68., 21 экз.

Дополнительная литература:

1. Ильин Владимир Александрович. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. для вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика". - 2-е изд. - М. : Изд-во Моск. ун-та, 2002. - 320 с. - ISBN 5-211-04487-8 : 125.00., 32 экз.
2. Беклемишева Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : [учеб. пособие] / под ред. Д. В. Беклемишева. - Изд. 2-е, перераб. - М. : Физматлит, 2004. - 496 с. - ISBN 5-9221-0010-6 : 196.10., 36 экз.
3. Фаддеев Д. К. Задачи по высшей алгебре : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. специальностям. - Изд. 13-е, стер. - СПб. : Лань, 2004. - 288 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0427-1 : 74.00., 16 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://www.lib.unn.ru/>

1. Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>

2. Библиотека "Лань" <http://e.lanbook.com/>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.05.01 - Фундаментальные математика и механика.

Автор(ы): Любимцев Олег Владимирович, доктор физико-математических наук.

Рецензент(ы): Титова Елена Борисовна.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.