

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных
уравнений

Уровень высшего образования
Магистратура

Направление подготовки / специальность
01.04.01 - Математика

Направленность образовательной программы
Фундаментальная математика и приложения

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.04 Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, выработать стратегию действий	УК-1.1: Знать методы критического анализа проблемных ситуаций УК-1.2: Уметь выработать стратегию действий при возникновении критических ситуаций УК-1.3: Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций	УК-1.1: Знать основные понятия дисциплины «Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений», определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений. УК-1.2: Уметь решать задачи вычислительного и теоретического характера в области дифференциальных уравнений УК-1.3: Владеть математическим аппаратом дифференциальных уравнений, методами решения задач и доказательств утверждений в этой области.	Собеседование	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы
ОПК-1: Способен формулировать и решать актуальные и значимые	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных дисциплин в области	ОПК-1.1: Знать: - основные понятия и	Собеседование Контрольная работа	Экзамен: Контрольные

<p>проблемы математики</p>	<p>математических и (или) естественных наук</p> <p>ОПК-1.2: Умеет выбирать методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p> <p>ОПК-1.3: Владеет навыками применения фундаментальных знаний в профессиональной деятельности</p>	<p>определения;</p> <ul style="list-style-type: none"> - основные теоремы существования и единственности решения; - теоремы о свойствах решений линейных дифференциальных уравнений и систем; - теоремы о представлении решений дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами; - утверждения об устойчивости решений и поведении траекторий вблизи положений равновесия; - основы метода нормальной формы и его приложений к исследованию локального поведения системы ДУ в окрестности с.р. и периодической траектории. <p>ОПК-1.2:</p> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - решать основные типы дифференциальных уравнений первого порядка; - решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами; - исследовать устойчивость решений; - строить траектории на фазовой плоскости; - решать уравнения в частных производных первого порядка. <p>ОПК-1.3:</p> <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками решения и анализа основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений; - техникой линеаризации, основными понятиями дифференциальной 		<p>вопросы</p> <p>Задачи</p>
----------------------------	---	--	--	------------------------------

		топологии.		
--	--	------------	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	5
Часов по учебному плану	180
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	78
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
Ф	Ф	Ф	Ф	Ф	
Тема 1. Задача Коши для систем ОДУ. Многомерный вариант теоремы Пикара. Обсуждение	11	2	2	4	7
Тема 2. Теорема Пеано. Доказательство, обсуждение, примеры.	11	2	2	4	7
Тема 3. Теорема о продолжении решения задачи Коши. Понятие о явлении "blow-up" во множестве решений. Структура множества достижимости. Теорема Кнезера.	20	6	6	12	8
Тема 4. Пример Хартмана "сильной" неединственности решения задачи Коши	16	4	4	8	8
Тема 5. Теорема о локальном выпрямлении траекторий. Обсуждение и примеры.	15	2	2	4	11
Тема 6. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Гамильтоновы системы. Основные свойства.	17	4	4	8	9
Тема 7. Общие динамические системы с непрерывным временем (потоки). Основные свойства. Предельные множества. Устойчивость по Лагранжу.	19	4	4	8	11
Тема 8. Траектории, устойчивые по Пуассону, их классификация.	17	4	4	8	9

Модельные примеры систем с различными типами устойчивых по Пуассону траекторий.					
Тема 9. Минимальные и квазимиимальные множества потоков. Примеры.	16	4	4	8	8
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	180	32	32	66	78

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Задача Коши для систем ОДУ. Многомерный вариант теоремы Пикара. Обсуждение примеры.

Тема 2. Теорема Пеано. Доказательство, обсуждение, примеры.

Тема 3. Теорема о продолжении решения задачи Коши. Понятие о явлении "blow up" во множестве решений задачи Коши. Структура множества достижимости. Теорема Кнезера.

Тема 4. Пример Хартмана сильной неединственности решения задачи Коши.

Тема 5. Теорема о локальном выпрямлении траекторий. Обсуждение и примеры.

Тема 6. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Гамильтоновы системы. Основные свойства.

Тема 7. Общие динамические системы с непрерывным временем (потоки). Основные свойства. Предельные множества. Устойчивость по Лагранжу.

Тема 8. Траектории, устойчивые по Пуассону, их классификация. Модельные примеры систем с различными типами устойчивых по Пуассону траекторий.

Тема 9. Минимальные и квазимиимальные множества потоков. Примеры.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (МАТЕМАТИКА маг_1к.), <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6884>.

Иные учебно-методические материалы:

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lyapunov1950ru.djvu>
2. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Ajns1939ru.djvu>
3. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Golubev1950ru.djvu>
4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/KoddingtonLevinson1958ru.djvu>
5. М.В.Федорюк. Асимптотика, интегралы, ряды. СМБ, М.: Наука, Физматгиз, 1987.
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Fedoryuk_ODE_1977ru.djvu

6.В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт, Математические аспекты классической и небесной

механики. М.: ВИНТИ, 1985

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/ArnoldKozlovNejshtadt1985ru.djvu>

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции УК-1:

Вопросы для оценки компетенции «УК-1»

1. Теория Флоке-Ляпунова для систем ЛДУ с периодическими коэффициентами. Формулировка.
2. Поведение системы в окрестности состояния равновесия и периодической траектории.
3. Метод нормальной формы для окрестности состояния равновесия.
5. Гомологическое уравнение и резонансы. Примеры нормальных форм.
6. Метод нормальной формы для окрестности периодической траектории.
7. Метод нормальной формы и простейшие локальные бифуркации. Применение к системам специального типа (гамильтоновым, обратимым)
8. Координатное представление для гамильтоновых систем, основные свойства, системы с одной степенью свободы.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Вопросы для оценки компетенции «ОПК-1»

9. Гамильтоновы системы с полутора степенями свободы и симплектические диффеоморфизмы плоскости.
10. Интегрируемые системы, неподвижные точки симплектических диффеоморфизмов
11. Теорема Пуанкаре-Ляпунова, окрестность резонансной кривой при возмущении.
12. Линейные гамильтоновы системы, спектр.
13. Нормальная форма квадратичного гамильтониана.
14. Резонансы, теорема Пуанкаре-Биркгофа
15. Нормальная форма Биркгофа в окрестности эллиптической точки.
16. Гомоклинические точки, поведение в окрестности, методы описания.
17. Аносовские автоморфизмы тора.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ на вопрос верен или есть незначительные ошибки.
не зачтено	Ответа нет или допущены грубые ошибки.

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Вариант 1.

1. Является ли линейная система $x' = x \cos(t) - y \sin(\pi t)$, $y' = x \sin(\pi t) + y \cos(t)$ системой ДУ с периодическими коэффициентами?
 Ответ: а) является; б) не является (*); в) не знаю.
2. Линейная система ДУ $x' = IAx$, с блочной (4x4)-матрицей I, состоящей из блоков 0, E (первая строка), -E, 0 (вторая строка) является гамильтоновой, если:
 а) A – невырождена; б) A – симметрична (*); в) A – ортогональна.
3. Бифуркация Андронова-Хопфа при изменении параметра системы ДУ на плоскости – это:
 а) рождение периодической траектории из состояния равновесия (*);
 б) рождение периодической траектории удвоенного периода из периодической траектории;
 в) распадение состояния равновесия на два состояния равновесия.

5

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задания контрольной работы решены верно или есть незначительные ошибки.
не зачтено	Контрольная работа не решена или есть грубые ошибки.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные	Продемонстрированы все основные умения. Решены все	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи.

	отказа обучающегося от ответа	место грубые ошибки	негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Локальные задачи: поведение траекторий в окрестности состояния равновесия и периодической траектории. Линеаризация, грубые состояния равновесия, теорема Хартмана-Гробмана.
2. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теорема Флоке-Ляпунова.
3. Мультипликаторы и устойчивость периодического движения. Существование логарифма невырожденной матрицы.
4. Метод нормальной формы для окрестности состояния равновесия. Гомологическое уравнение, формальная нормальная форма.
5. Применение метода нормальной формы для изучения локальных бифуркаций. Бифуркация Андронова-Хопфа.

6

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

13. Уравнения Лагранжа и Гамильтона в механике. Переход к уравнениям Гамильтона от уравнений Лагранжа. Примеры.
14. Высшие уравнения Эйлера-Лагранжа-Остроградского, их приведение к гамильтоновой форме. Пример: стационарное уравнение Свифта-Хоенберга, сведение к системе уравнений Гамильтона.
15. Первые интегралы гамильтоновых систем, скобки Пуассона, сохранение объема и теорема Пуанкаре о возвращении.
16. Структура гамильтоновой системы с одной степенью свободы, лемма Морса, основные типы состояний равновесия, периодические траектории, сепаратрисы, фазовый портрет.
17. Линейные гамильтоновы системы. Свойства спектра гамильтоновых матриц.
18. Системы с полутора степенями свободы, отображение Пуанкаре. Понятие двумерного симплектического многообразия, задание гамильтонова векторного поля на нем.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
отлично	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.
очень хорошо	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.
хорошо	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами
удовлетворительно	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений

Оценка	Критерии оценивания
	вследствие отказа обучающегося от ответа

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

7. Гамильтоновы системы с полутора степенями свободы и <u>симплектические диффеоморфизмы плоскости</u> . Интегрируемые системы, неподвижные точки <u>симплектических диффеоморфизмов</u> .	УК-1
8. Теорема Пуанкаре-Ляпунова, окрестность резонансной кривой при возмущении.	УК-1
9. Линейные гамильтоновы системы, спектр, нормальная форма квадратичного гамильтониана	УК-1

5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

4. Метод нормальной формы для окрестности периодической траектории..	ОПК-1
5. Метод нормальной формы и простейшие локальные бифуркации. Применение к системам специального типа (гамильтоновым, обратимым)	ОПК-1

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Ляпунов Александр Михайлович. Общая задача об устойчивости движения / при ред. участии Г. Мюнц. - 2-е изд. - Л. ; М. : ОНТИ. Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1935. - 386 с., 1 вкл. л. портр. - 7.50., 3 экз.
2. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений : учеб. пособие для гос. ун-тов. - 2-е изд. - М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. - 436 с. : черт. - 12.20., 5 экз.
3. Хартман Филип. Обыкновенные дифференциальные уравнения / пер. с англ. И. Х. Сабитова и Ю. В. Егорова ; под ред. В. М. Алексеева. - М. : Мир, 1970. - 720 с. : черт. - 3.21., 3 экз.

Дополнительная литература:

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / пер. с англ. под ред. А. М. Эфроса . - Харьков : ДНТВУ, 1939. - 717, [2] с. : рис. - 11.75., 1 экз.
2. Коддингтон Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / пер. с англ. Б. М. Левитана. - М. : Изд. иностр. лит., 1958. - 474 с. : черт. - 21.65., 1 экз.
3. Федорюк Михаил Васильевич. Асимптотика: интегралы и ряды. - М. : Наука, 1987. - 544 с. - (Справочная математическая библиотека : СМБ). - 1.90., 3 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Ефремова Людмила Сергеевна, доктор физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Сакбаев Всеволод Жанович.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.