

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Дискретные динамические системы в низких размерностях

---

Уровень высшего образования  
Магистратура

---

Направление подготовки / специальность  
01.04.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы  
Фундаментальная математика и приложения

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.01.02 Дискретные динамические системы в низких размерностях относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-5: Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию	ПК-5.1: Знает специфику научных обзоров ПК-5.2: Умеет составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию ПК-5.3: Владеет способностью по составлению научных обзоров, рефератов и отчетов по тематике проводимых исследований	ПК-5.1: Знает основные источники происхождения и базовые понятия теории дискретных динамических систем в низких размерностях  ПК-5.2: Умеет проводить доказательства основных теорем теории дискретных динамических систем в низких размерностях  ПК-5.3: Владеет основными методами исследования дискретных динамических систем в низких размерностях	Собеседование Задачи	Зачёт: Контрольные вопросы Задачи Задания
ПК-6: Обладает навыками преподавания математики и информатики в средней школе, специальных учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования	ПК-6.1: Знает уровень подготовки и психологию обучающихся при организации учебного процесса ПК-6.2: Умеет учитывать уровень подготовки и психологию обучающихся ПК-6.3: Владеет навыками преподавания математики и информатики в средней школе, средних специальных и высших учебных заведениях	ПК-6.1: Знает основные понятия теории дискретных динамических систем, базовые модели и их свойства. Понимает математическое единство всех рассматриваемых понятий и свойств дискретных систем в низких размерностях, а также понимать взаимосвязь дискретных динамических	Собеседование Задачи	Зачёт: Контрольные вопросы Задания

		<p>систем с динамическими системами с непрерывным временем.</p> <p>ПК-6.2: Умеет применять теоретические знания для решения задач теории дискретных динамических систем в низких размерностях, исследовать асимптотическое поведение траекторий.</p> <p>ПК-6.3: Владеет техникой доказательства математических утверждений и методами исследования асимптотического поведения траекторий, обладающих различными свойствами возвращаемости</p>		
--	--	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>75</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b>
	<b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего	в том числе
--	-------	-------------

	(часы)	Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Введение в теорию дискретных динамических систем. Подходы, основанные на понятиях типичного свойства и топологической сопряженности. Программа Смейла-Палиса	27	4	4	8	19
Тема 2. Классификация траекторий по свойству возвращаемости. Исследование асимптотического поведения траекторий	27	4	4	8	19
Тема 3. Введение в гиперболическую теорию	27	4	4	8	19
Тема 4. Одномерные модели и их обобщения	26	4	4	8	18
Аттестация	0				
КСР	1				1
Итого	108	16	16	33	75

### Содержание разделов и тем дисциплины

Введение в теорию дискретных динамических систем. Подходы, основанные на понятиях типичного свойства и топологической

сопряженности. Программа Смейла-Палиса

Классификация траекторий по свойству возвращаемости. Исследование асимптотического поведения траекторий.

Введение в гиперболическую теорию.

Одномерные модели и их обобщения

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "Дискретные динамические системы в низких размерностях (МАТЕМАТИКА 4к, Маг.пр. "ФМиП" )" (<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6855>).

#### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-5:

1. Приведите примеры автономных систем дифференциальных уравнений на плоскости, допускающих секущую Пуанкаре. Постройте отображение последования на секущей Пуанкаре.
2. Докажите принцип Боля-Брауэра для треугольника на плоскости, используя его триангуляцию.
3. С использованием принципа Боля – Брауэра докажите существование состояния равновесия у автономной системы дифференциальных уравнений на плоскости, удовлетворяющей определенным условиям.
4. Приведите примеры функциональных уравнений, допускающих применение принципа сжимающих отображений для доказательства существования их решений.
5. Приведите набросок доказательства теоремы Гробмана – Хартмана.
6. Проанализируйте доказательство структурной устойчивости диффеоморфизмов окружности Морса – Смейла с точки зрения свойства локальной устойчивости гиперболических периодических точек.

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

8. Постройте отображение сдвига на пространстве бесконечных последовательностей из 0 и 1, укажите его свойства. Является ли это отображение топологически сопряженным с отображением окружности  $y = 2x \pmod{1}$ ?
9. Докажите существование подковы Смейла у tent-отображения.
10. Приведите пример гиперболического автоморфизма тора. Докажите его структурную устойчивость.
11. Сформулируйте определение графа периодической орбиты отображения отрезка. Для отображения отрезка с периодической орбитой периода 5 постройте граф этой орбиты при всех возможных способах взаимного расположения ее точек.
12. Докажите, что существование периодической орбиты периода 3 у непрерывного отображения отрезка влечет за собой существование периодических орбит любых других периодов.
13. Приведите пример непрерывного отображения отрезка, имеющего периодическую орбиту периода 5 и не содержащего периодической орбиты периода 3.
14. Приведите пример непрерывного отображения отрезка, имеющего периодические орбиты периодов  $2^i$  при всех  $i \geq 0$  и не содержащего периодических орбит других периодов.
15. Опишите сценарий бифуркаций удвоения периодов периодических точек.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы на вопросы верны или допущены незначительные ошибки.
не зачтено	Ответов нет или допущены грубые ошибки.

### 5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-5:

- Задание1. Докажите типичность гиперболических линейных автоморфизмов в пространстве всех линейных автоморфизмов в евклидовых пространствах.
- Задание2. Сформулируйте определение типичного свойства. Докажите его корректность.
- Задание3. Постройте пример непрерывного отображения отрезка с замкнутым множеством периодических точек, имеющего периодические точки всех периодов  $2^i$  при всех  $i \geq 0$
- Задание4. Докажите, что множество наименьших периодов периодических точек гладкого отображения отрезка с замкнутым множеством периодических точек ограничено
- Задание5. Укажите множество наименьших периодов периодических точек, растягивающих эндоморфизмов окружности.

## 5.1.4 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенций ПК-6:

- Задание 1. Используя свойства отображения сдвига на пространстве односторонних последовательностей из символов 0 и 1, установите свойства растягивающего отображения окружности  $y=2x \pmod{1}$
- Задание2. Докажите топологическую сопряженность диффеоморфизма в  $R^n$  в окрестности гиперболической неподвижной точки со своим дифференциалом в этой точке
- Задание3. Докажите типичность диффеоморфизмов окружности Морса –Смейла в пространстве всех диффеоморфизмов окружности
- Задание4. Опишите асимптотическое поведение траекторий эндоморфизмов отрезка с замкнутым множеством периодических точек
- Задание5. Постройте пример косо го произведения отображений интервала, имеющего периодические точки с множеством наименьших периодов, совпадающим с множеством натуральных чисел.

## Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задача решена верно или с незначительными ошибками.
не зачтено	Задача не решена или допущены грубые ошибки.

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несуществе	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	ответа			ошибок	нных ошибок		
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1. Приведите примеры автономных систем дифференциальных уравнений 1.1. указанием отображения сдвига по траекториям; 1.2. допускающих секущую Пуанкаре. Во втором случае постройте отображение последования на секущей Пуанкаре.
2. Докажите полноту пространства $C^r(M)$ , $r \geq 0$ .....
3. Приведите примеры всюду плотных; граничных; нигде не плотных множеств в $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 1$ ; укажите множество 1-ой категории в $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 1$ . .....
4. Сформулируйте определение дискретной динамической системы. Приведите пример дискретных динамических систем, образующих множество 1-ой категории в $C^1(S^1)$ , образующих множество 2-ой категории в $C^1(S^1)$ .

#### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-6

5. Сформулируйте принцип Боля-Брауэра. Приведите пример применения к исследованию существования состояний равновесия в автономных системах дифференциальных уравнений. .....
6. Приведите примеры дискретных динамических систем в $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 2$ , имеющих гиперболические периодические точки периода 2. Сформулируйте определение гиперболических периодических точек. Приведите их классификацию.
7. Приведите пример дискретной динамической системы в $\mathbb{R}^2$ , имеющей подкову Смейда. Используя гомеоморфизм сдвига, опишите динамику отображения на подкове Смейда. ....

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы на вопросы верны или допущены незначительные ошибки.
не зачтено	Ответов нет или допущены грубые ошибки.

#### 5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-6

6. Постройте пример дискретной динамической системы в  $\mathbb{R}^2$ , имеющей подкову Смейла. Используя гомеоморфизм сдвига, опишите динамику отображения на подкове Смейла.
7. Постройте пример гиперболического автоморфизма двумерного тора.
8. Для заданного непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего периодическую точку периода 7, укажите граф периодической орбиты периода 7. По построенному графу опишите множество периодических точек, которые имеет заданное отображение.
9. Приведите доказательство обобщенной теоремы А.Н.Шарковского для косых произведений отображений интервала.

### 5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1. Сформулируйте определение дискретной динамической системы. Приведите пример дискретных динамических систем, образующих множество 1-ой категории в  $C^1(S^1)$ .
2. Сформулируйте принцип Боля-Брауэра. Приведите пример применения к исследованию существования состояний равновесия в автономных системах дифференциальных уравнений.
3. Приведите примеры дискретных динамических систем в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , имеющих гиперболические периодические точки периода 2.
4. Проведите классификацию гиперболических периодических точек. Приведите примеры дискретных динамических систем в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , имеющих неподвижные точки-стоки, источники, седла.
5. Постройте примеры дискретных динамических систем в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , имеющих эллиптические неподвижные точки.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задание выполнено верно или с незначительными ошибками.
не зачтено	Задание не выполнено или допущены грубые ошибки.

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / пер. с фр. Е. Леонтович, А. Майер ; под ред. и с примеч. А. А. Андропова ; доп. Е. Леонтович [и др.]. - М. ; Л. : Гостехиздат, 1947. - 392 с. - (Классики естествознания. Математика, механика, физика, астрономия). - 14.00., 3 экз.
2. Немыцкий Виктор Владимирович. Качественная теория дифференциальных уравнений. - М. ; Л. : Гостехиздат, 1947. - 449 с. - 19.50., 2 экз.
3. Плисс Виктор Александрович. Нелокальные проблемы теории колебаний. - М. ; Л. : Наука, 1964. - 367 с. - 1.08., 2 экз.

Дополнительная литература:

1. Гладкие динамические системы : [сб. ст.] / пер. М. И. Брина [и др.] ; под ред. Д. В. Аносова. - М. : Мир, 1977. - 257 с. : ил. - (Математика : Новое в зарубежной науке / ред. сер.: А. Н. Колмогоров,

С. П. Новиков ; 4). - 1.57., 1 экз.

2. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. - М. : Гостехиздат, 1953. - 396 с. - 10.75., 2 экз.

3. Сибирский Константин Сергеевич. Введение в топологическую динамику / АН МССР, Ин-т математики, Вычисл. центр. - Кишинев : [б. и.], 1970. - 144 с. : черт. - 1.00., 1 экз.

4. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства / пер. с англ. В. А. Исковских, под ред. М. М. Постникова. - М. : Мир, 1970. - 442 с. : черт. - 1.93., 4 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.:ОГИЗ, 1947. Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений.М.-Л.:ОГИЗ, 1947. Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

3.Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л.: Наука, 1964.

4. Аносов Д.В.(ред.) Гладкие динамические системы (Сборник переводов, Математика в зарубежной науке №4). М.: Мир, 1977. Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

5. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.

6. Сибирский К.С. Введение в топологическую динамику. Кишинев, 1970. Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

7. Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970 Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

8. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И., Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985.

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Ефремова Людмила Сергеевна, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.