

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Граничные интегральные уравнения в механике сплошных сред

Уровень высшего образования

Магистратура

Направление подготовки / специальность

01.04.03 - Механика и математическое моделирование

Направленность образовательной программы

Информационное и программное обеспечение. Инженерия

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.08 Граничные интегральные уравнения в механике сплошных сред относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-2: Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1: Знать структуру жизненного цикла проекта. УК-2.2: Уметь адаптировать жизненный цикл под специфику конкретных проектов. УК-2.3: Владеть методами управления проектом на всех этапах его жизненного цикла.	УК-2.1: Знать основные понятия, структуру, методы создания проектов при решении прикладных задач. УК-2.2: Уметь создавать и анализировать проекты конкретных прикладных задач. УК-2.3: Владеть навыками управления проектом при решении прикладных задач.	Собеседование	Экзамен: Контрольная работа
ОПК-1: Способен находить, формулировать и решать актуальные проблемы механики и математики	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук ОПК-1.2: Умеет формулировать, анализировать и решать профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук. ОПК-1.3: Имеет практический опыт постановки и решения актуальных задач математики и механики.	ОПК-1.1: Знать основные понятия, математические модели метода граничных интегральных уравнений, современные методы исследования в области решения задач. ОПК-1.2: Уметь создавать и анализировать современные методы решения прикладных задач на основе знаний фундаментальных математических моделей.	Собеседование	Экзамен: Контрольная работа

		ОПК-1.3: Владеть практическим опытом создания и применения базовых знаний и современного математического аппарата метода граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач.		
ОПК-4: Способен использовать и создавать эффективные программные средства для решения задач механики	ОПК-4.1: Знает базовые понятия информатики, информации, ее измерения, кодирования и представления в вычислительных системах, принципы сбора, хранения и обработки информации, а также современные алгоритмы, средства разработки и программные средства. ОПК-4.2: Умеет использовать знания, полученные в области компьютерных наук. ОПК-4.3: Имеет практический опыт использования информационных технологий, а также создания программных средств для решения задач профессиональной деятельности.	ОПК-4.1: Знать основные понятия, современное программное обеспечение и методы исследования в области решения задач методом граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач. ОПК-4.2: Уметь создавать новые и модернизировать известные модели метода граничных интегральных уравнений, анализировать результаты с использованием современного программного обеспечения. ОПК-4.3: Владеть практическим опытом применения базовых знаний и современного математического и алгоритмического моделирования при решении прикладных задач методом граничных интегральных уравнений, в том числе в междисциплинарных областях.	Собеседование	Экзамен: Контрольная работа

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	

аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	2
самостоятельная работа	74
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Состояние вопроса. Базовые математические модели.	10	2	2	4	6
Матрицы фундаментальных и сингулярных решений.	20	3	3	6	14
Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения.	20	3	3	6	14
Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги.	28	4	4	8	20
Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры.	28	4	4	8	20
Аттестация	36				
КСР	2				2
Итого	144	16	16	34	74

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Состояние вопроса. Базовые математические модели.
2. Матрицы фундаментальных и сингулярных решений.
3. Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения.
4. Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги.
5. Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен).

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции УК-2:

1. Построить функцию Грина для одномерного волнового уравнения / уравнения теплопроводности.
2. Записать граничное интегральное уравнение (ГИУ) для волнового уравнения / уравнения теплопроводности (одномерный, двумерный, трехмерный случаи).

2.2.1. Задачи для оценки компетенции УК-2

Задача 1

Рассмотрите алгоритм решения интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]$$

с вырожденным ядром

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \varphi_i(s),$$

где $\psi_i(x), \varphi_i(s), i = 1, 2, \dots, n$ - системы линейно независимых функций.

Задача 2

Приведите расчетные формулы метода квадратур при использовании формулы трапеций для приближенного решения интегрального уравнения Вольтера второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Задача 3

Вычислите интеграл $\int_a^b \frac{dt}{t-x}, \quad a < x < b$

Задача 4

Решить уравнение $y(x) + \int_0^x (2+x-s)y(s)ds = x^2$.

Задача 5

Решить уравнение $y(x) = x^2 + \lambda \int_{-1}^1 (x+s)y(s)ds$.

Задача 6

Решить уравнение методом коллокации $y(x) - \int_0^x \frac{s^2}{x^2+s^2} y(s)ds = x \cdot \arctg \frac{1}{x}$, выбрав точки коллокации $x_1=0, x_2=1$.

Задача 7

Методом конечных сумм решить уравнение $y(x) - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{x+s^2}} y(s)ds = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + x$.

а) на основе квадратурной формулы Гаусса с двумя узлами

б) на основе квадратурной формулы Симпсона с узлами $x_1=1, x_2=1.5, x_3=2$.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1. Физические предпосылки метода граничных интегральных уравнений. Свойства потенциалов. Задачи Дирихле и Неймана в и интегральные уравнения для них
2. Исследование интегральных уравнений внутренней задачи Дирихле и внешней -Неймана при $n \geq 3$.
3. Теория гармонических потенциалов. Спектральные свойства граничных операторов.
4. Метод граничных интегральных уравнений для системы Ламе. Исходные положения теории равновесия изотропного упругого тела. Фундаментальное решение системы Ламе. Потенциалы теории упругости.

5. Метод граничных интегральных уравнений для системы Ламе. Метод граничных интегральных уравнений для системы Ламе. Потенциалы теории упругости и их свойства.
6. Исследование интегральных уравнений внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана при $n \geq 2$.
7. Модифицированное интегральное уравнение внешней задачи Дирихле.
8. Теория гармонических потенциалов. Способы сведения задач Дирихле и Неймана к граничным уравнениям. Прямые варианты метода интегральных уравнений.
9. Теория гармонических потенциалов. Способы сведения задач Дирихле и Неймана к граничным уравнениям. Уравнение первого рода для решения задачи Дирихле
10. Граничные интегральные уравнения основных задач теории упругости.
11. Метод граничных интегральных уравнений для системы Ламе. Система интегральных уравнений для смешанной задачи теории упругости.

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-4:

2.2.3. Контрольная работа для оценки компетенции ОПК-4:

Вариант 1

Дано интегральное уравнение

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, z)u(z)dz = f(x), x \in [a, b]$$

1. Задание 1.

Получите условия сходимости метода простой итерации

$$u^{k+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, z)u^k(z)dz + f(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

при, например, $u^0 = f(x)$ для приближенного решения интегрального уравнения.

2. Задание 2.

В методе квадратур находится приближенное решение в точках $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрите возможности выполнения приближенного решения на все точки отрезка $[a, b]$ при приближенном решении интегрального уравнения.

3. Задание 3.

Получите интегральное уравнение для определения производной порядка m заданной функции $f(x)$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				

компет							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворитель	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена

	но	дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции УК-2

1. Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя.
2. Вывод интегральных уравнений для основных граничных задач теории гармонических функций.
3. Теоремы Фредгольма для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве.
4. Интегральные операторы со слабой особенностью.
5. Разрешимость граничных интегральных уравнений для задач Дирихле и Неймана уравнения Лапласа.
6. Спектральные свойства граничных интегральных операторов.
7. Сингулярные интегральные уравнения. Примеры сингулярных интегральных уравнений.
8. Граничные интегральные уравнения прямого подхода для уравнения Ламе.
9. Согласованная и изопараметрическая гранично-элементные схемы.
10. Переход от дифференциальных уравнений к интегральным. Пространства основных и обобщенных функций.
11. Построение фундаментального решения для дифференциальных уравнений и переход к интегральным уравнениям.
12. Приближенные методы решения интегральных уравнений. Принцип сжатых отображений.
13. Нахождение собственных чисел и функций интегральных операторов по методу Келлога.
14. Нахождение собственных чисел и функций в случае вырожденных интегральных операторов.
15. Интегральные операторы Гильберта-Шмидта. Операторы с конечной абсолютной нормой. Совпадение этих двух классов интегральных операторов. Теоремы о разложении ядра интегрального оператора в ряд.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя.
2. Вывод интегральных уравнений для основных граничных задач теории гармонических функций.
3. Теоремы Фредгольма для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве.
4. Интегральные операторы со слабой особенностью.
5. Разрешимость граничных интегральных уравнений для задач Дирихле и Неймана уравнения Лапласа.
6. Спектральные свойства граничных интегральных операторов.
7. Сингулярные интегральные уравнения. Примеры сингулярных интегральных уравнений.

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-4

1. Граничные интегральные уравнения прямого подхода для уравнения Ламе.
2. Согласованная и изопараметрическая гранично-элементные схемы.
3. Переход от дифференциальных уравнений к интегральным. Пространства основных и обобщенных функций.
4. Построение фундаментального решения для дифференциальных уравнений и переход к интегральным уравнениям.
5. Приближенные методы решения интегральных уравнений. Принцип сжатых отображений.
6. Нахождение собственных чисел и функций интегральных операторов по методу Келлога.
7. Нахождение собственных чисел и функций в случае вырожденных интегральных операторов.
8. Интегральные операторы Гильберта-Шмидта. Операторы с конечной абсолютной нормой. Совпадение этих двух классов интегральных операторов. Теоремы о разложении ядра интегрального оператора в ряд.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок.
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок.
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / Баженов В.Г., Игумнов Л.А. - Москва : Физматлит, 2008., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=645914&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Бреббия Карл. Методы граничных элементов / пер. с англ. Л. Г. Корнейчука ; под ред. Э. И. Григолюка. - М. : Мир, 1987. - 524 с. ил. - 3.60., 3 экз.
2. Партон Владимир Залманович. Интегральные уравнения теории упругости. - М. : Наука, 1977. - 311 с. : ил. - 1.60., 1 экз.
3. Угодчиков Андрей Григорьевич. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. - Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1986. - 294, [1] с. : граф. - 3.00., 28 экз.
4. Баженов Валентин Георгиевич. Метод граничных элементов в трехмерной динамической теории упругости и вязкоупругости с сопряженными полями : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2007. - 328 с. - В надзаг.: Приоритетный национальный проект "Образование". Инновационная образоват. программа Нижегород. ун-та: Образовательно-научный центр "Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение". - ISBN 978-5-91326-028-4 : 143.83., 4 экз.
5. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / под ред. В. И. Смирнова, Х. Л. Смолицкого. - [Б. м.] : [б. и.], [19--]. - 416 с. - 13.15., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ie.htm>

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/continuous.htm>

1. Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничного элемента в трехмерных задачах математической физики: Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и механике. Н.Новгород: Нижегородский университет. 2007. 100 с.
<http://www.unn.ru/pages/issues/aids/2007/45.pdf>
2. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное обращение преобразования Лапласа: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 34 с.
http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_LaplaceTransform.pdf
3. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 43 с.
http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_BoundaryIntegralEquations.pdf
4. Игумнов Л.А., Марков И.П. Применение метода ГИУ для решения краевых динамических упругопластических задач в трехмерной постановке: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 21 с.
<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/124.pdf>
5. Игумнов Л.А., Пазин В.П. Построение матриц Грина и Неймана в трехмерной статической теории упругости с сопряженными полями: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 22 с.
<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/125.pdf>
6. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Фундаментальные решения трехмерной динамической теории пороупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 23 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/126.pdf>
7. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Фундаментальные и сингулярные решения изотропной теории упругости и вязкоупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород:

Нижегородский госуниверситет. 2011. 18 с.

<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/127.pdf>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: Мультимедийная техника - компьютер, проектор, экран.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.04.03 - Механика и математическое моделирование.

Автор(ы): Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.