

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Качественно-численные методы исследования динамических систем

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование и вычислительная математика

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.04.02 Качественно-численные методы исследования динамических систем относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-4: Способен применять методы математического и компьютерного исследования при анализе задач на основе знаний фундаментальных математических и компьютерных наук	ПК-4.1: Знает фундаментальные и теоретические основы, необходимые для исследования научных проблем ПК-4.2: Умеет самостоятельно применять полученные знания для анализа объекта исследования, определять цели и задачи исследования, а также выбирать корректный метод исследования научной проблемы ПК-4.3: Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности, а именно решения научных задач в соответствии с поставленной целью и выбранной методикой	ПК-4.1: Знать основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук.  ПК-4.2: Уметь анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук. а также выбирать корректный метод исследования научной проблемы  ПК-4.3: Владеть опытом научно-исследовательской деятельности, применения фундаментальных разделов математики, базовых знаний естественнонаучного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач.	Контрольная работа Практическое задание	Зачёт: Контрольные вопросы

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>75</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0
1. Математическая модель динамической системы и задача ее исследования	14	2	2	4	10
2. Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка	23	4	4	8	15
3. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка	25	4	4	8	17
4. Неавтономные динамические системы второго порядка с периодическими правыми частями	21	4	2	6	15
5. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений	24	2	4	6	18
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	108	16	16	33	75

#### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Математическая модель динамической системы и задача ее исследования: Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические систем. Фазовое пространство. Фазовые траектории. Математическая модель динамической системы. Примеры динамических систем. Задача исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портреты. Бифуркация.

2. Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка: Простые состояния равновесия. Фазовая плоскость линейной системы. Поведение фазовых траекторий нелинейной системы в окрестности состояния равновесия в случае действительных, комплексных, кратных корней характеристического уравнения. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями. Сложные состояния равновесия. Бифуркации состояний равновесия. Области притяжения устойчивых состояний равновесия.

3. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка: Численный метод отыскания состояний равновесия и определения их типа. Численный метод построения сепаратрис седловых состояний равновесия. Численный метод построения фазовой траектории, выходящей из произвольной точки фазовой плоскости.

4. Неавтономные динамические системы второго порядка с периодическими правыми частями: Сведение исследования структуры фазового пространства к точечному отображению плоскости в плоскость. Системы с цилиндрическим фазовым пространством. Типы периодических движений. Мультипликаторы. Бифуркации. Поведение фазовых траекторий в окрестности устойчивых, неустойчивых и седловых периодических движений. Области притяжения устойчивых периодических движений. Периодические движения колебательного и вращательного типов.

5. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений: Численные методы отыскания и исследования устойчивости периодических решений неавтономных динамических систем второго порядка. Численный метод построения сепаратрисных инвариантных кривых точечного отображения плоскости в плоскость.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Виды самостоятельной работы студентов:

- проработка теоретического материала лекционных занятий;
- подготовка к выполнению письменной контрольной работы;
- подготовка к промежуточной аттестации.

Проработка теоретического материала лекционных занятий

Выполняется самостоятельно обучающимся с использованием материалов лекций и рекомендованной основной и дополнительной литературы. Контроль выполняется на практических занятиях.

Подготовка к выполнению письменной контрольной работы

Аудиторная контрольная работа проводится по материалам темы «Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка».

Для подготовки к контрольной работе рекомендуется повторно просмотреть материалы соответствующих лекций и практических занятий.

Разбор контрольной работы и исправление ошибок проводится в часы контроля самостоятельной работы студентов.

Подготовка к промежуточной аттестации

Фактором успешного прохождения промежуточной аттестации является систематическая работа студента в течение всего периода изучения дисциплины. В этом случае подготовка к зачету будет концентрированной систематизацией всех полученных знаний, умений и навыков.

В качестве методических материалов при подготовке к зачету рекомендуется использовать

собственные конспекты лекций и рекомендованную основную и дополнительную литературу. Допуском к зачету является выполнение письменной контрольной работы и презентаций результатов двух практических заданий.

Дополнительная литература:

Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. -М.: Наука, 1976; 1990.

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

#### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия систем:

$$1) \ddot{x} + x^2 e^{-x} \dot{x} + x^3 + 2x = 0;$$

$$2) \ddot{x} + H(x)\dot{x} + \alpha x^3 + \beta x = 0; \quad \alpha > 0, \beta > 0, H(x) > 0;$$

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

#### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Практическое задание) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

Являются ли приведенные ниже функции знакоопределенными? Знакопостоянными? Если да, то в какой области?

- a)  $V(x, y) = \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y + 1$ ;
- b)  $V(x, y) = \sin^2 x + \sin^2 y - 2 \sin x \sin y$ ;
- c)  $V(x, y) = x^4 + y^2 - y^3$ ;
- d)  $V(x, y, z) = x^2 y^4 z^6$ ;

### Критерии оценивания (оценочное средство - Практическое задание)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-4

1. Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические системы. Фазовое пространство. Математическая модель динамической системы.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
3. Задача качественного исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портрет. Бифуркация.
4. Состояния равновесия автономной динамической системы второго порядка. Простое и сложное состояние равновесия.
5. Типы простых состояний равновесия автономной динамической системы второго порядка.
6. Устойчивость траекторий динамических систем. Непрерывная зависимость от начальных условий и параметров.
7. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными различными характеристическими корнями одного знака.
8. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными характеристическими корнями разных знаков.
9. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными равными характеристическими корнями.
10. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с комплексными характеристическими корнями, имеющими не равную нулю действительную часть.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М. : Наука, 1967. - 487 с. : черт. -



2.58., 53 экз.

2. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М. : Наука, 1972. - 471 с. - 1.89., 51 экз.

Дополнительная литература:

1. Андронов Александр Александрович. Теория колебаний / с предисл. Л. И. Мандельштама. - 2-е изд. - М. : Наука, 1981. - 568 с. : ил. - 2.60., 274 экз.

2. Бутенин Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний : [учеб. пособие для втузов]. - М. : Наука, 1987. - 382 с. - 1.00., 50 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Киселева Н.В. Компьютерный комплекс по качественной теории дифференциальных уравнений для поддержки самостоятельной работы // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 423-434.

Электронный ресурс: [https://www.j-ets.net/ETS/russian/depositary/v21\\_i1/pdf/14.pdf](https://www.j-ets.net/ETS/russian/depositary/v21_i1/pdf/14.pdf)

2. Киселева Н.В. Электронный образовательный ресурс по качественно-численным методам исследования неавтономных динамических систем // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 281-292.

<http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/364/301>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Киселева Наталья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Осипов Григорий Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.