МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от
«30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

Олимпиадная математика

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
3	ФТД. Факультативы	Дисциплина *ФТД.05 Олимпиадная математика* является факультативом в ООП направления подготовки **01.03.02 Прикладная математика и информатика**

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции**		**Наименование оценочного средства**
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	**Результаты обучения по дисциплине**	
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**УК-1.1.** Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	Знает современные методы исследования теоретических и прикладных задач, которые содержатся не только в университетских математических курсах, но и в актуальных научных статьях.	Собеседование (зачет)
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности .	Умеет находить и анализировать полученные знания при решении нестандартных задач	Практическое задание
	УК-1.3. Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	Имеет практический опыт применения современных технологий и нестандартных методов решения.	Практическое задание

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	**1 ЗЕТ**
Часов по учебному плану	**36**
в том числе	

аудиторные занятия (контактная работа): **- занятия лекционного типа** **- текущий контроль (КСРИФ)**	 **32** **1**
самостоятельная работа	**3**
Промежуточная аттестация – зачет	

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	**Всего (часы)**	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				**Самостоятельная работа обучающегося, часы**
		Занятия лекционного типа	**Занятия семинарского типа**	**Занятия лабораторного типа**	**Всего**	
	Очная	Очная	Очная	Очная	Очная	Очная
1. Комбинаторика: рекуррентные соотношения, перечисление графов, производящие функции, диаграммы Юнга, числа Каталана.	2	2				
2. Теория чисел: теоремы Ферма и Эйлера, алгебраические уравнения над кольцами вычетов, квадратичные вычеты, теорема Вильсона и критерий Эйлера, суммы двух квадратов, арифметические функции и целые точки.	2	2				
3. Теория многочленов: неприводимые многочлены: неприводимость по модулю, признаки Эйзенштейна и Дюма, симметрические многочлены, многочлены Чебышева, многочлены Бернулли.	2	2				
4. Неравенства: неравенство Коши – Буняковского, неравенство о средних, Йенсена, транс-неравенство, геометрические неравенства, интегральнысварианты классических неравенств, задачи на наибольшие и наименьшие значения.	2	2				
5. Решение задач предыдущих студенческих олимпиад	27	24				3
6. КСРИФ	1					1
7. Зачет						
Итого	36	32				4

Изучение дисциплины направлено на формирование и развитие знаний, умений и навыков применения математических методов, которые в стандартных учебных программах обычно не затрагивают и которые связаны с задачами студенческих олимпиад разных уровней.

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме практических заданий.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Олимпиадная математика» включает выполнение практических заданий под контролем преподавателя и подготовку к зачету.

Контрольные и практические задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	**Шкала оценивания сформированности компетенций**						
	плохо	**неудовлетворительно**	**удовлетворительно**	**хорошо**	**очень хорошо**	**отлично**	**превосходно**
	Не зачтено		Зачтено				
Знания	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		**Уровень подготовки**
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»

	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

Критерий оценивания ответов на типовые контрольные вопросы для зачета и практических заданий к зачету

Результаты решения практических заданий	Оценка
Студент решил задания контрольной олимпиады на 20%	зачтено
Студент решил задания контрольной олимпиады менее чем на 20%.	не зачтено

Результаты ответа на контрольные вопросы к зачету	Оценка
Студент дал развернутый ответ на 70% контрольных вопросов.	зачтено
Студент дал развернутый ответ менее чем на 70% контрольных вопросов.	не зачтено

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Примерные практические задания для текущего контроля успеваемости

1. Пусть $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ и $f(f(x)) = x$. Доказать, что существует точка x_0, в которой $f(x_0) = x_0$. (5 баллов)
2. Доказать неравенство: $x^2 > (1 + x) \ln^2 (1 + x), x > -1, x \neq 0$.
3. Известно, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
4. Пусть $x_1 = 2, x_2 = 2 + 1/2, x_3 = 2 + 1/(2 + ½), \dots$ и т.д.. Доказать, что последовательность x_n сходится и найти её предел.
5. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема и ограничена на всей оси. Доказать, что существует точка x_0, в которой $f''(x_0) = 0$.

6. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ - произвольные квадратные матрицы. Доказать, что собственные значения матриц $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BA}$ совпадают.
7. Существует ли непрерывная, неотрицательная и неограниченная на интервале $[0, +\infty)$ функция $f(x)$ такая, что существует интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
8. Пусть $a_k \geq 0,\ b_k \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n.$ Докажите, что
9. $\sqrt[n]{(a_1+b_1)\cdot\ldots\cdot(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1\cdot\ldots\cdot b_n}$.
10. Пусть $p > 1$ и $f(x) \geq 0$, причём функция $f^p(x)$ интегрируема (может быть в несобственном смысле) на любом конечном интервале $[0, A]$. Доказать, что $F^p(x) = o(x^{p-1})$ при $x \to 0$, где $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

5.2.2. Контрольные вопросы к зачету

Вопрос	Код компетенции (*согласно РПД*)
1. Комбинаторика: рекуррентные соотношения, перечисление графов, производящие функции, диаграммы Юнга, числа Каталана.	УК-1
2. Теория чисел: теоремы Ферма и Эйлера, алгебраические уравнения над кольцами вычетов, квадратичные вычеты, теорема Вильсона и критерий Эйлера, суммы двух квадратов, арифметические функции и целые точки.	УК-1
3. Теория многочленов: неприводимые многочлены: неприводимость по модулю, признаки Эйзенштейна и Дюма, симметрические многочлены, многочлены Чебышева, многочлены Бернулли.	УК-1
4. Неравенства: неравенство Коши –Буняковского, неравенство о средних, Йенсена, транс-неравенство, геометрические неравенства, интегральные варианты классических неравенств, задачи на наибольшие и наименьшие значения.	УК-1

5.2.3. Практические задания к зачету по дисциплине «Олимпиадная математика» для оценки сформированности компетенции _УК-1

1. Рассматривается множество окружностей, вписанных в данный полукруг. **а)** Какую линию представляет собой множество центров вписанных окружностей? **б)** Какая из двух частей, на которые эта линия делит полукруг, имеет бо́льшую площадь?
2. Вычислите определённый интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}dx$
3. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} arctg\frac{1}{2n^2}$ сходится и найдите его сумму.
4. Даны квадратные матрицы A и B одного порядка с действительными элементами, удовлетворяющие при некотором натуральном n соотношению $(A+B)^n = \mathrm{O}$ (нулевая матрица). Известно, что матрица B невырожденная. **а**) Докажите, что если A и B коммутируют, то матрица A тоже невырожденная; **б**) справедливо ли утверждение п. **а**) без условия коммутирования?
5. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ два числа $(n-2)!$ и НОД$(n, (n-2)!)$ сравнимы по модулю n.

6. Представьте 30 в виде суммы нескольких положительных чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.
7. Рассматривается множество кубов в $\boldsymbol{R}^3$, у которых все вершины имеют целочисленные координаты и ни одно ребро не параллельно координатным осям. **а**) Докажите, что это множество непусто. **б**) Докажите, что длина ребра любого куба из этого множества – целое число. **в**) Обобщите утверждение п. **б**) для пространства $\boldsymbol{R}^{2n+1}$.
8. Рассматривается множество окружностей, вписанных в данный полукруг. **а)** Какую линию представляет собой множество центров вписанных окружностей? **б)** Какая из двух частей, на которые эта линия делит полукруг, имеет бóльшую площадь?
9. Вычислите определённый интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}dx$$

10. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} arctg\frac{1}{2n^2}$ сходится и найдите его сумму.
11. Даны квадратные матрицы A и B одного порядка с действительными элементами, удовлетворяющие при некотором натуральном n соотношению $(A+B)^n = \mathrm{O}$ (нулевая матрица). Известно, что матрица B невырожденная. **а**) Докажите, что если A и B коммутируют, то матрица A тоже невырожденная; **б**) справедливо ли утверждение п. **а**) без условия коммутирования?
12. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ два числа $(n – 2)!$ и НОД(n, $(n – 2)!$) сравнимы по модулю n.
13. Представьте 30 в виде суммы нескольких положительных чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.
14. Рассматривается множество кубов в $\boldsymbol{R}^3$, у которых все вершины имеют целочисленные координаты и ни одно ребро не параллельно координатным осям. **а**) Докажите, что это множество непусто. **б**) Докажите, что длина ребра любого куба из этого множества – целое число. **в**) Обобщите утверждение п. **б**) для пространства $\boldsymbol{R}^{2n+1}$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Студенческие олимпиады по математике УГТУ-УПИ / Веретенников Б. М., Мохрачева Л. П., Соболев А. Б., Ходак Г. Л. - 2-е изд. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 256 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-1078-5. Постоянная ссылка на документ: http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=695939&idb=0

2. Иванов, О. А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей — М: МЦНМО, 2009. — 384 с.: ил. ISBN 978-5-94057-505-4. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-94057-505- Постоянная ссылка на документ: http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=711630&idb=0 Ссылка на полный текст документа: https://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=9347
3. Прасолов В.В. Многочлены. — 3-е изд., исправленное. — М.: МЦНМО, 2017. — 335 с. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-4439-2638-4.

Постоянная ссылка на документ: http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=828687&idb=0 Ссылка на полный текст документа: https://e.lanbook.com/book/267590

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения. Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: к.ф.-м.н., доцент каф. ДУМЧА Малкин М.И.
Рецензент: д.ф.-м.н., профессор ННГУ Чекмарев Д.Т.
Заведующий кафедрой ДУМЧА: д.ф.-м.н. Калинин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики 30 ноября 2022 года, протокол № 3.