

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

**Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod»**

Институт экономики и предпринимательства

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

Working programme of the discipline

Linear algebra

Higher education level

Bachelor degree

Area of study / speciality

38.03.01 - Economics

Focus /specialization of the study programme

World Economy

Mode of study

full-time

Nizhny Novgorod

Year of commencement of studies 2024

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.12 Линейная алгебра относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Четко описывает состав и структуру требуемых данных и информации, грамотно реализует процессы их сбора, обработки и интерпретации	УК-1.1: Знать содержание основных понятий линейной алгебры, основные приемы работы с системами уравнений, матрицами, векторами. Уметь использовать инструментарий линейной алгебры в решении стандартных задач профессиональной деятельности Владеть приемами решения задач, методами использования средств линейной алгебры в решении стандартных задач профессиональной деятельности	Задачи	Зачёт: Задачи
ОПК-5: Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении профессиональных задач.	ОПК-5.1: Осуществляет выбор инструментальных и программных средств для решения профессиональных задач	ОПК-5.1: Знать стандартные экономико-математические модели и задачи, решаемые средствами линейной алгебры Уметь применять стандартные экономико-математические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты Владеть навыками использования современных информационных технологий и программных средств при	Задачи	Зачёт: Задачи

		решении профессиональных задач		
--	--	--------------------------------	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	1
самостоятельная работа	39
Промежуточная аттестация	0
	Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Матрицы и определители	18	4	4	8	10
Тема 2. Системы линейных уравнений. Балансовый анализ.	18	4	4	8	10
Тема 3. Векторная алгебра	8	2	2	4	4
Тема 4. Линейные пространства и линейные операторы	12	2	2	4	8
Тема 5. Элементы аналитической геометрии	15	4	4	8	7
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	16	16	33	39

Contents of sections and topics of the discipline

Тема 1. Матрицы и определители.

Понятие матрицы произвольного порядка. Действия над матрицами. Виды матриц. Определитель квадратной матрицы. Свойства определителя. Обратная матрица. Ранг матрицы. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях матриц. Теоремы о связи ранга с числом линейно независимых строк, о представлении строки в виде линейной комбинации независимых строк.

Тема 2. Системы линейных уравнений. Балансовый анализ.

Виды СЛУ. Решения СЛУ. Система линейных уравнений в матричной форме. Метод решения линейных систем, у которых число уравнений равно числу переменных, переходом к обратной матрице. Правило Крамера решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли. Схема решения СЛУ. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальные решения. Общее решение неоднородной СЛУ. Балансовые модели в экономике.

Тема 3. Векторная алгебра.

Геометрический вектор. Основные понятия. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов. Ось, числовая ось, проекция вектора на ось. Декартов базис в пространстве и на плоскости и декартова система координат. Координаты вектора. Модуль (длина) вектора в координатах. Линейные операции в координатах. Скалярное произведение в координатах.

Тема 4. Линейные пространства и линейные операторы.

Понятие линейного векторного пространства. Векторы в n -мерном евклидовом пространстве. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Размерность векторного пространства. Базис векторного пространства. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису. Матрица перехода. Линейные операторы и их свойства. Матрица линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

Тема 5. Элементы аналитической геометрии.

Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Полуплоскость. Уравнение плоскости. Полупространство. Кривые второго порядка и их канонические уравнения.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Голубева, Е. А. Линейная алгебра : учебно-методическое пособие / Е. А. Голубева. — Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2022. — 31 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/283031> (дата обращения: 29.03.2024).

5. Assessment tools for ongoing monitoring of learning progress and interim certification in the discipline (module)

5.1 Model assignments required for assessment of learning outcomes during the ongoing monitoring of learning progress with the criteria for their assessment:

5.1.1 Model assignments (assessment tool - Tasks) to assess the development of the competency УК-1:

1. Вычислить сумму и произведение двух матриц: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Привести матрицу к ступенчатому виду: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему уравнений, используя правило Крамера: $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -x - y + 2z = -6 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$.

7. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -x - y + 2z = -6 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$.

8. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ -x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$.

5.1.2 Model assignments (assessment tool - Tasks) to assess the development of the competency ОПК-5:

1. Найти \vec{x} , если $\vec{x} = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$ и $\vec{a}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (-1, -3, 4, 5)$, $\vec{a}_3 = (-5, 0, 2, 3)$.

2. Выясните, являются ли векторы линейно независимыми. Если векторы линейно зависимы, выразите один из векторов через остальные.

1) $\vec{a}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, -1)$;

2) $\vec{a}_1 = (1, -3, 2)$, $\vec{a}_2 = (-1, 3, -2)$;

3) $\vec{a}_1 = (0, 5, -7)$, $\vec{a}_2 = (0, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 0, -2)$;

4) $\vec{a}_1 = (1, -2, 5)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 1)$;

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Записать уравнения прямой, проходящей через точку $M(8; 9; 10)$ параллельно оси OZ .

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки: $A(-3; 1)$ и $B(0; 2)$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 4)$ параллельно прямой:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}.$$

7. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, большая ось равна 16, а расстояние между директрисами 32.

8. Определить фокус и директрису параболы $y^2 = 12x$.

Assessment criteria (assessment tool — Tasks)

Grade	Assessment criteria
pass	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно»
fail	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно»

5.2. Description of scales for assessing learning outcomes in the discipline during interim certification

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Scale of assessment for interim certification

Grade	Assessment criteria
-------	---------------------

pass	outstanding	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "outstanding", the knowledge and skills for the relevant competencies have been demonstrated at a level higher than the one set out in the programme.
	excellent	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "excellent",
	very good	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "very good",
	good	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "good",
	satisfactory	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "satisfactory", with at least one competency developed at the "satisfactory" level.
fail	unsatisfactory	At least one competency has been developed at the "unsatisfactory" level.
	poor	At least one competency has been developed at the "poor" level.

5.3 Model control assignments or other materials required to assess learning outcomes during the interim certification with the criteria for their assessment:

5.3.1 Model assignments (assessment tool - Tasks) to assess the development of the competency UK-1

- Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.
- Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Привести матрицу к ступенчатому виду: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- Вычислить сумму и произведение двух матриц: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Решить матричные уравнения:
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.
- Решить матричные уравнения:
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.
 - $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ -x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$.
- Решить систему уравнений, используя правило Крамера: $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -x - y + 2z = -6 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$.
- Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -x - y + 2z = -6 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$.

5.3.2 Model assignments (assessment tool - Tasks) to assess the development of the competency ОПК-5

1. Выясните, являются ли векторы линейно независимыми. Если векторы линейно зависимы, выразите один из векторов через остальные.
 - 1) $\vec{a}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, -1)$;
 - 2) $\vec{a}_1 = (1, -3, 2)$, $\vec{a}_2 = (-1, 3, -2)$;
 - 3) $\vec{a}_1 = (0, 5, -7)$, $\vec{a}_2 = (0, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 0, -2)$;
 - 4) $\vec{a}_1 = (1, -2, 5)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 1)$;
2. Найти \vec{x} , если $\vec{x} = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$ и $\vec{a}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (-1, -3, 4, 5)$, $\vec{a}_3 = (-5, 0, 2, 3)$.
3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Записать уравнения прямой, проходящей через точку $M(8; 9; 10)$ параллельно оси OZ .
5. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки: $A(-3; 1)$ и $B(1; 2)$.
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 4)$ параллельно прямой:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}.$$
7. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, большая ось равна 16, а расстояние между директрисами 32.
8. Определить фокус и директрису параболы $y^2 = 12x$.

Assessment criteria (assessment tool — Tasks)

Grade	Assessment criteria
pass	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно»
fail	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно»

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Besova M. I. Basic Course of Linear Algebra and Analytical Geometry (teaching guide) : учебное пособие / Besova M. I., Kudin S. F. - Москва : НИУ МЭИ, 2022. - 140 с. - Книга из коллекции НИУ МЭИ - Математика. - ISBN 978-5-7046-2582-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=885701&idb=0>.
2. Fundamentals of Linear Algebra. Part I. Ч. 1. Fundamentals of Linear Algebra. Part I / Вишневская С. Р., Гомонова О. В., Мартынова Л. А., Назарова З. И., Иноземцева А. И. - Красноярск : СибГУ им. академика М. Ф. Решетнёва, 2021. - 90 с. - Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия для студентов бакалавриата по направлениям подготовки 25.03.01 «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей», 25.03.02 «Техническая эксплуатация авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов» всех форм обучения. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции СибГУ им. академика М. Ф. Решетнёва - Языкознание и литературоведение.,

<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=783915&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Мнухин В.Б. Advanced Linear Algebra with Applications in Calculus : учебное пособие / Мнухин В.Б.; Куповых Г.В.; Тимошенко Д.В. - Москва : ЮФУ, 2022. - 162 с. - ISBN 978-5-9275-4208-6., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=869140&idb=0>.
2. Arak M. Mathai. Linear Algebra : A Course for Physicists and Engineers. - De Gruyter, 2017. - 1 online resource. - ISBN 9783110562507. - ISBN 9783110562354. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=855970&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

MS Windows 7 (лицензия на ГОУ ВПО ННГУ им. Н.И. Лобачевского, идентификатор 47276400)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: проектор, экран

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 38.03.01 - Economics.

Author(s): Пыхтеев Юрий Николаевич, кандидат экономических наук.

Заведующий кафедрой: Горбунова Мария Лавровна, доктор экономических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 12.12.23, протокол № 6.