

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины
Метод гранично-временных элементов

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и вычислительная математика

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.07.01 Метод гранично-временных элементов относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-3: Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	<p>ПК-3.1: Знает методы сбора, обработки и интерпретации данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям</p> <p>ПК-3.2: Умеет собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям</p> <p>ПК-3.3: Имеет практический опыт сбора и обработки данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям</p>	<p>ПК-3.1: Знать основные понятия, математические и алгоритмические модели метода гранично-временных элементов, современные методы исследования в области решения задач.</p> <p>ПК-3.2: Уметь осуществлять анализ и выбор методов решения современных прикладных задач на основе знаний фундаментальных математических и компьютерных наук.</p> <p>ПК-3.3: Владеть опытом применения базовых знаний и современного математического и алгоритмического аппарата метода гранично-временных элементов при решении прикладных задач.</p>	<p>Задачи</p> <p>Контрольная работа</p> <p>Собеседование</p>	<p>Зачёт:</p> <p>Контрольные вопросы</p> <p>Задания</p>

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
--	-------

Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	1
самостоятельная работа	39
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
Ф	Ф	Ф	Ф	Ф	
Историческое введение в предмет.	6	2	2	4	2
Математические постановки основных задач.	12	2	2	4	8
Матрицы Грина и Неймана.	17	4	4	8	9
Гранично-временные интегральные уравнения	18	4	4	8	10
Дискретные аналоги гранично-временных интегральных уравнений. Метод Квадратур сверток	18	4	4	8	10
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	16	16	33	39

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Историческое введение в предмет.
2. Математические постановки основных задач.
3. Матрицы Грина и Неймана.
4. Гранично-временные интегральные уравнения
5. Дискретные аналоги гранично-временных интегральных уравнений. Метод Квадратур сверток

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Дополнительная литература:

1. Бреббия К., Теллес Ж., Врубелл Л. Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. - 524с. 3 экз.
2. Игумнов Л.А., Марков И.П. Применение метода ГИУ для решения краевых динамических упругопластических задач в трехмерной постановке: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 21 с.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-3:

1. Используя интегральное представление

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= - \left[u'(x)u^*(x, \xi) - u(x) \frac{\partial u^*(x, \xi)}{\partial x} \right]_0^l - \int_0^l \frac{p(x)}{EA} u^*(x, \xi) dx \\
 &= - \frac{1}{2k} \sin k(l - \xi) u'(l) + \frac{1}{2} \cos k(l - \xi) \operatorname{sign}(l - \xi) u(l) \\
 &\quad + \frac{1}{2k} \sin(k\xi) u'(0) - \frac{1}{2} \cos(k\xi) \operatorname{sign}(-\xi) u(0) - \int_0^l \frac{p(x)}{EA} u^*(x, \xi) dx \\
 &= - \frac{1}{2EAk} \sin k(l - \xi) N(l) + \frac{1}{2} \cos k(l - \xi) u(l) \\
 &\quad + \frac{1}{2EAk} \sin(k\xi) N(0) + \frac{1}{2} \cos(k\xi) u(0) - \int_0^l \frac{p(x)}{EA} \frac{1}{2k} \sin(kr) dx
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(kl) & \sin(kl) \\ -\cos(kl) & -\sin(kl) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ \frac{N(0)}{EAk} \\ u(l) \\ \frac{N(l)}{EAk} \end{bmatrix} = -\frac{1}{EAk} \int_0^l \begin{bmatrix} p(x)\sin(kx) \\ p(x)\sin k(l-x) \end{bmatrix} dx$$

записать решение для граничных функций в задаче о действии крутящего момента $M_T(x)$ на упругий стержень длины l , описываемой уравнением

$$\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} - h^2\vartheta(x) = -\frac{M_T(x)}{EC_T}$$

2. Запишите функция Грина для задачи об изгибе упругой балки, описываемой уравнением

$$EI \frac{d^4w(x)}{dx^4} = q(x)$$

если балка жестко закреплена на обоих концах.

3. Запишите функцию Грина для задачи об изгибе упругой балки, описываемой уравнением

$$EI \frac{d^4w(x)}{dx^4} = q(x)$$

если балка жестко закреплена на конце $x=0$, а конец $x=l$ свободен.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-3:

1. Смените порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_a^x \left[\int_s^b G(\bar{x}, s) d\bar{x} \right] ds, \quad x \in [a, b].$$

и проверьте полученное соотношение для случая

$$G(\bar{x}, s) = \bar{x}^3 s.$$

2. Для краевой задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = f(x)$$

$$y(a) = y_0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{d}{dx} y(x) \right|_{x=b} = y'(b) = y'_1$$

выведите решение путем прямого интегрирования и преобразуйте полученный двойной интеграл в одинарные интегралы.

3. Запишите решение системы, соответствующей краевой задаче об изгибе балки,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & l \\ -1 & -l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(a) \\ w'(a) \\ w(b) \\ w'(b) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2EI} \int_a^b \begin{bmatrix} (x-a)M(x) \\ (b-x)M(x) \end{bmatrix} dx$$

при краевых условиях

$$w(a) = \tilde{w}_0 \quad \text{and} \quad w'(b) = \tilde{w}'_1.$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три

Оценка	Критерии оценивания
	несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-3:

1. Одномерное потенциальное течение
2. Применение непрямого метода граничных элементов
3. Задача о балке
4. Дискретизация поверхностных и объемных интегралов
5. Прямой метод граничных элементов
6. Интегрируемость ядер

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.	Уровень знаний ниже минимальных требований.	Минимально допустимый уровень	Уровень знаний в объеме, соответствующий	Уровень знаний в объеме, соответствующий	Уровень знаний в объеме, соответствующий	Уровень знаний в объеме, превышающий

	Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Имели место грубые ошибки	знаний. Допущено много негрубых ошибок	ющем программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	ющем программе подготовки . Допущено несколько несущественных ошибок	ующем программе подготовк и. Ошибок нет.	м программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»

не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-3

1. Одномерное потенциальное течение.
2. Применение непрямого метода граничных элементов
3. Задача о балке
4. Сингулярные решения
5. Дискретизация поверхностных и объемных интегралов
6. Вычисление значений потенциала и скорости во внутренних точках
7. Прямой метод граничных элементов
8. Эквивалентность непрямого и прямого методов граничных элементов
9. Фундаментальные решения
10. Сингулярные решения
11. Интегрируемость ядер
12. Метод квадратур свертки

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-3

1. Провести расчет задачи о нагружении призматического пороупругого тела с помощью программы, реализующей метод граничных элементов. Длина тела $l=3\text{м}$, ширина и высота $a=b=0.25\text{м}$. На закрепленном торце заданы нулевые перемещения и нулевой поток. На другом торце задано давление $p=S_0f(t)$, где $f(t)$ - функция Хевисайда, $S_0=1\text{Н/м}^2$. Боковые грани тела имеют защемление по перемещениям в направлении нормалей и непроницаемы. Параметры пороупругого материала $K = 2.1\text{e}+8 \text{ Н/м}^2$, $G = 9.8\text{e}+7 \text{ Н/м}^2$, $\rho=1884 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 0.48$, $K_s = 1.1\text{e}+10 \text{ Н/м}^2$, $\rho_f=1000 \text{ кг/м}^3$, $K_f = 3.3\text{e}+9 \text{ Н/м}^2$, $k=3.55\text{e}-9 \text{ м}^4/\text{Н}\cdot\text{с}$. Временной интервал выбрать $[0,16l/c]$, где c - скорость продольной волны. Построить временные зависимости перемещения и порового давления на нагруженной и закрепленной гранях, соответственно.
2. Провести расчет задачи о нагружении призматического пороупругого тела с помощью программы, реализующей метод граничных элементов. Длина тела $l=3\text{м}$, ширина и высота $a=b=0.25\text{м}$. На

закрепленном торце заданы нулевые перемещения и нулевой поток. На другом торце задано давление $p=S_0f(t)$, где $f(t)$ - функция Хевисайда, $S_0=1\text{Н/м}^2$. Боковые грани тела имеют защемление по перемещениям в направлении нормалей и непроницаемы. Параметры пороупругого материала $K = 8e+9\text{ Н/м}^2$, $G = 6e+9\text{ Н/м}^2$, $\rho=2458\text{ кг/м}^3$, $\nu = 0.19$, $K_s = 3.6e+10\text{ Н/м}^2$, $\rho_f=1000\text{ кг/м}^3$, $K_f = 3.3e+9\text{ Н/м}^2$, $k=1.9e-10\text{ м}^4/\text{Н}\cdot\text{с}$. Временной интервал выбрать $[0,16l/c]$, где c - скорость продольной волны. Построить временные зависимости перемещения и порового давления на нагруженной и закрепленной гранях, соответственно.

3. Провести моделирование эффекта медленной продольной волны в задаче о нагружении призматического пороупругого тела с помощью программы, реализующей метод граничных элементов. Длина тела $l=3\text{м}$, ширина и высота $a=b=0.25\text{м}$. На закрепленном торце заданы нулевые перемещения и нулевой поток. На другом торце задано давление $p=S_0f(t)$, где $f(t)$ - функция Хевисайда, $S_0=1\text{Н/м}^2$. Боковые грани тела имеют защемление по перемещениям в направлении нормалей и непроницаемы. Параметры пороупругого материала $K = 2.1e+8\text{ Н/м}^2$, $G = 9.8e+7\text{ Н/м}^2$, $\rho=1884\text{ кг/м}^3$, $\nu = 0.48$, $K_s = 1.1e+10\text{ Н/м}^2$, $\rho_f=1000\text{ кг/м}^3$, $K_f = 3.3e+9\text{ Н/м}^2$, $k=3.55e-9\text{ м}^4/\text{Н}\cdot\text{с}$. Варьировать величину проницаемости до значения $k=3.55e-5$, увеличивая на порядок на каждом шаге. Временной интервал выбрать $[0,16l/c]$, где c - скорость продольной волны. Построить временные зависимости перемещения и порового давления во внутренней точке теле с координатой $l/2$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три незначительные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Партон Владимир Залманович. Интегральные уравнения теории упругости. - М. : Наука, 1977. - 311 с. : ил. - 1.60., 1 экз.
2. Угодчиков Андрей Григорьевич. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. - Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1986. - 294, [1] с. : граф. - 3.00., 28 экз.

Дополнительная литература:

1. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / Баженов В.Г., Игумнов Л.А. - Москва : Физматлит, 2008., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=645914&idb=0>.
2. Баженов Валентин Георгиевич. Метод граничных элементов в трехмерной динамической

теории упругости и вязкоупругости с сопряженными полями : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2007. - 328 с. - В надзаг.: Приоритетный национальный проект "Образование". Инновац. образоват. программа Нижегород. ун-та: Образовательно-научный центр "Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение". - ISBN 978-5-91326-028-4 : 143.83., 4 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. <http://www.unn.ru/pages/issues/aids/2007/45.pdf>
2. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости: Учебно-методическое пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2010. 43 с.
http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_BoundaryIntegralEquations.pdf
3. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное обращение преобразования Лапласа: Учебно-методическое пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2010. 34 с.
http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_LaplaceTransform.pdf
4. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/124.pdf>
5. Игумнов Л.А., Пазин В.П. Построение матриц Грина и Неймана в трехмерной статической теории упругости с сопряженными полями: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 22 с.
<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/125.pdf>
6. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Фундаментальные решения трехмерной динамической теории пороупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 23 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/126.pdf>
7. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Фундаментальные и сингулярные решения изотропной теории упругости и вязкоупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 18 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/127.pdf>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран)

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.