

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
от 14.12.2021 г. протокол № 4

**Рабочая программа дисциплины**

**Дифференциальные уравнения**

---

Уровень высшего образования

**Бакалавриат**

---

Направление подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

---

Направленность образовательной программы

**Математическое моделирование и вычислительная математика**

---

Форма обучения

**Очная**

---

Нижний Новгород

2022 год



## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части. Код дисциплины Б1.О.10

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.10 «Дифференциальные уравнения» относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика».

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	<b>Знает:</b> – методы, основанные на сборе, анализе и интерпретации научных данных; – основные принципы, факты, понятия, аналитические и численные методы, изучаемые в дисциплине;	<i>собеседование</i>
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	<b>Умеет:</b> – интерпретировать новую информацию в предметной области; – строить простейшие математические модели и исследовать их; – доказывать ранее изученные в рамках дисциплины математические утверждения; – решать математические задачи ДУ – линейные первого порядка, Бернулли, Рикатти, однородные, в полных дифференциалах, линейные ДУ n-го порядка и линейные системы. А также ДУ, которые, требуют некоторой оригинальности мышления.	<i>Коллоквиум</i>  <i>Контрольная работа</i>

	<b>УК-1.3.</b> Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.	<b>Владеет:</b> – терминологией предметной области; – принципами построения и выбора эффективных методов решения и интерпретации результатов; – навыками поиска информации в рамках предметной области в сети Интернет и других источниках; – навыками использования универсальных математических пакетов для выполнения для исследования динамических моделей; – навыками интерпретации результатов численного исследования динамических систем и дифференциальных уравнений; – навыками математического моделирования для несложных динамических систем.	<i>собеседование</i>
<b>ОПК-1:</b> Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	<b>ОПК-1.1.</b> Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и естественных наук	<b>Знает:</b> – основные факты из математического анализа, геометрии и алгебры и других дисциплин, на которые опирается изучение дисциплины «Дифференциальные уравнения»	<i>Собеседование</i>
	<b>ОПК-1.2.</b> Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<b>Умеет:</b> – применять базовые знания естественных наук, математики и информатики – решать основные типы дифференциальных уравнений	<i>Коллоквиум</i>  <i>Контрольная работа</i>
	<b>ОПК-1.3.</b> Имеет практический опыт применения фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности.	<b>Владеет:</b> – математическим мышлением, математической культурой; – способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на тему предметной области; – основными приемами проведения математических доказательств	<i>Собеседование</i>

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>Очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>__ 7 _ ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>252</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	<b>163</b>
- занятия лекционного типа	<b>64</b>
- занятия семинарского типа	<b>64</b>
- занятия лабораторного типа	<b>32</b>
- текущий контроль (КСР)	<b>3</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>53</b>
<b>Промежуточная аттестация – зачет, экзамен</b>	<b>36</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1. Введение: примеры и задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ)	6	2	2	-	4	2
Тема 2. ДУ первого порядка, интегрируемые в квадратурах	34	10	10	6	26	8
Тема 3. ДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной	12	4	4	-	8	4
Тема 4 Математические модели детерминированных явлений.	18	4	4	6	14	4
Тема 5. Линейные ДУ n-го порядка	14	6	4		10	4
Тема 6. Линейные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами	23	6	8	4	18	5
Текущий контроль (КСР)	1				1	
<b>Промежуточная аттестация –зачет</b>						
<b>Итого за III семестр</b>	<b>108</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>16</b>	<b>81</b>	<b>27</b>
Тема 7. Системы линейных ДУ первого порядка	23	8	6	4	18	5
Тема 8. Линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами	23	8	6	4	18	5
Тема 9. Существование и единственность решений	13	4	4	-	8	5

Тема 10. Автономные системы.	24	6	10	4	20	4
Тема 11. Устойчивость по Ляпунову	16	4	4	4	12	4
Тема 12. Первые интегралы	7	2	2	-	4	3
Текущий контроль	2				2	
Промежуточная аттестация – экзамен	36					
<b>Итого за IV семестр</b>	<b>144</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>16</b>	<b>82</b>	<b>26</b>
<b>Итого за год</b>	<b>252</b>	<b>64</b>	<b>64</b>	<b>32</b>	<b>163</b>	<b>53</b>

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа, лабораторного типа, коллоквиумах

Промежуточная аттестация проходит в форме **зачета** в III семестре и **экзамена** в IV семестре.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Ниже приводятся виды самостоятельной работы студентов, порядок их выполнения и контроля, приводится учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы по ее отдельным видам и разделам дисциплины.

##### **Виды самостоятельной работы студентов:**

- проработка теоретического материала лекционных занятий;
- подготовка домашних заданий к научно-практическим занятиям;
- подготовка к выполнению письменных контрольных работ;
- подготовка к промежуточной аттестации в форме зачета или экзамена

##### **4.1. Проработка теоретического материала лекционных занятий**

Выполняется самостоятельно с использованием лекционных материалов и материалов, разобранных в литературе (список обязательной и дополнительной литературы приводится).

Контроль выполняется также в виде коллоквиума, который проводится в начале 3-го семестра. Коллоквиум проводится по теоретическому материалу. Ставится оценка по пятибалльной системе, которая потом учитывается на экзамене.

##### **4.2. Подготовка домашних заданий к занятиям семинарского типа**

Домашние задания выдаются по имеющемуся задачнику (указан в списке литературы), который включает краткий теоретический материал и примеры решения задач из каждого раздела.

Проверка выполнения домашних заданий проводится в начале каждого практического занятия. Используется две формы контроля: – выборочная проверка выполнения заданий у двух-трех человек из группы; – проверка в форме коллективного обсуждения у доски результатов выполнения отдельных заданий одним или двумя студентами.

##### **4.3. Подготовка занятиям лабораторного практикума**

К лабораторному практикуму готовится теоретический материал по следующим темам:

Лабораторная работа 1. Математические модели динамических систем в форме обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лабораторная работа 2. Численное решение задачи Коши как процесс математического моделирования.

Лабораторная работа 3. Линейный динамический демпфер.

Лабораторная работа 4. Параметрический резонанс.

Проверка уровня подготовки проводится в начале каждого лабораторного занятия. Используется две формы контроля: – выборочная проверка выполнения заданий у двух-трех человек из группы; – проверка в форме коллективного обсуждения у доски результатов выполнения отдельных заданий одним или двумя студентами.

#### 4.3. Подготовка к выполнению письменных контрольных работ

В течение учебного семестра проводится 4 аудиторные (две в 3-ем и две в 4-ом семестре) и две домашние (одна в третьем и одна в четвертом семестре) контрольные работы по материалам всех разделов лекционного курса.

Для подготовки к контрольным работам рекомендуется повторно прочитать теоретические разделы в задачнике, просмотреть полезные разделы в соответствующих источниках из списка рекомендованной литературы, а также самостоятельно решать несколько задач по теме контрольной работы из указанного задачника.

#### 4.4. Подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена

В качестве методических материалов при подготовке к экзамену рекомендуется использовать собственные конспекты лекций, а также источники, рекомендованные в списке литературы раздела 6.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

#### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	Удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	Превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»



## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1 Контрольные вопросы

Вопросы	Код формируемой компетенции
1. Определения дифференциального уравнения (ДУ) $n$ -го порядка, 1-го порядка, определение общего решения, частного решения, неявного решения (общий интеграл), особого решения. ДУ с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.	<b>ОПК-1</b>
2. Линейные ДУ первого порядка. Свойства решений однородного линейного ДУ. Решение неоднородного линейного ДУ методом Лагранжа - вариации произвольной постоянной. Свойства решений неоднородного линейного ДУ.	<b>ОПК-1</b>
3. Метод Коши решения линейного ДУ первого порядка.	<b>ОПК-1</b>
4. Сведение уравнения Бернулли к линейному уравнению. Методы решения ДУ Рикатти.	<b>ОПК-1</b>
5. ДУ в полных дифференциалах. Необходимые и достаточные условия	<b>ОПК-1</b>
6. ДУ, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра. Уравнения Клеро и Лагранжа. Особые решения и дискриминантная кривая.	<b>УК-1.</b>
7. Линейный осциллятор. Модели. Вынужденные колебания гармонического и линейного осциллятора. Резонанс.	<b>УК-1.</b>
8. ДУ высших порядков. Определение частного решения, общего решения. Линейные ДУ $n$ -го порядка. Линейные однородные ДУ. Свойства решений линейного однородного ДУ $n$ -го порядка. 9. Линейная зависимость и независимость $n$ функций. Примеры. Определитель Вронского. Теоремы о линейной зависимости и линейной независимости частных решений.	<b>ОПК-1</b>
10. Фундаментальная система решений (ФСР) линейного однородного ДУ. Теорема существования ФСР. Построение общего решения линейного однородного ДУ по его ФСР. Теорема о связи линейного ДУ с его ФСР.	<b>ОПК-1</b>
11. Формула Остроградского – Лиувилля.	<b>ОПК-1</b>
12. Однородные линейные ДУ $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Отыскание общего решения в случае различных действительных и кратных корней характеристического уравнения, в случае комплексно-сопряженных корней.	<b>ОПК-1</b>
13. Неоднородные линейные ДУ. Теорема о виде общего решения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения – метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной) и метод Коши.	<b>ОПК-1</b>
14. Линейные ДУ $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Уравнение Эйлера.	<b>ОПК-1</b>
15. Системы линейных ДУ первого порядка. Система ДУ высших порядков. Каноническая система ДУ высших порядков.	<b>ОПК-1</b>
16. Линейные системы. Линейная зависимость и независимость вектор – функций. Определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости вектор – функций. Необходимые и достаточные условия зависимости и независимости решений линейной системы.	<b>ОПК-1</b>
17. Фундаментальная система решений (ФСР). Теорема о существовании ФСР для линейной однородной системы. Построение общего решения линейной	<b>УК-1.</b>

однородной системы ДУ по ее ФСР.	
18. Однородные линейные системы с постоянными коэффициентами. Построение ФСР и общего решения.	<b>ОПК-1</b>
19. Неоднородные линейные системы. Методы нахождения частных решений линейных неоднородных систем: метод вариации произвольной постоянной.	
20. Задача Коши для ДУ первого порядка, разрешенных относительно производной. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.	<b>УК-1.</b>
21. Постановка задачи Коши для ДУ $n$ – го порядка. Теорема существования и единственности решения з. Коши. Постановка задачи Коши для системы ДУ первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы ДУ.	<b>УК-1.</b>
22. Динамические системы, связь между фазовыми траекториями и интегральными кривыми, автономные динамические системы, фазовая плоскость, интегральные многообразия.	<b>УК-1.</b>
23. Окрестности состояний равновесия автономных динамических систем двух уравнений первого порядка. Типы особых точек на фазовой плоскости, понятие о грубой системе, предельном цикле системы.	<b>УК-1.</b>
24. Устойчивость по Ляпунову. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости. Устойчивости по первому приближению, теорема Четаева о неустойчивости, примеры.	<b>УК-1.</b>
25. Первые интегралы. Определения. Геометрия первого интеграла. Интегралы автономных систем.	<b>УК-1.</b>

### 5.2.2. Вопросы к зачёту по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Вопрос	Код компетенции (согласно РПД)
1. Определение ДУ 1-го порядка, определения общего решения, частного решения, неявного решения (общий интеграл), особого решения	<b>УК-1.</b>
2. Задача Коши для уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.	<b>ОПК-1</b>
3. Линейные ДУ первого порядка. Свойства решений однородного линейного ДУ. Решение неоднородного линейного ДУ методом Лагранжа - вариации произвольной постоянной.	<b>УК-1.</b>
4. Метод Коши решения линейного ДУ первого порядка.	<b>ОПК-1</b>
5. Сведение ДУ Бернулли к линейному ДУ. Методы решения ДУ Рикатти.	<b>УК-1.</b>
6. ДУ в полных дифференциалах. Необходимые и достаточные условия.	<b>ОПК-1</b>
7. ДУ Клеро и Лагранжа. Особые решения и дискриминантная кривая.	<b>ОПК-1</b>
8. Линейные ДУ $n$ -го порядка. Линейные однородные ДУ. Свойства решений линейного однородного ДУ $n$ – го порядка.	<b>УК-1.</b>

9. Линейная зависимость и независимость $n$ функций. Определитель Вронского.	ОПК-1
10. Теоремы о линейной зависимости и линейной независимости частных решений.	ОПК-1
11. Фундаментальная система решений (ФСР) линейного однородного ДУ $n$ -го порядка. Теорема существования ФСР. Построение общего решения линейного однородного ДУ по его ФСР.	ОПК-1
12. Однородные линейные ДУ $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Отыскание общего решения в случае различных действительных и кратных корней характеристического уравнения, в случае комплексно-сопряженных корней.	УК-1.
13. Неоднородные линейные уравнения ДУ. Теорема о виде общего решения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного ДУ – метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной) и метод Коши.	ОПК-1

### 5.2.3. Типовые тестовые задания (допуск к экзамену) для оценки сформированности компетенции УК-1

#### Вопрос

Тип вопроса: множественный выбор

#### Формулировка вопроса:

Указать уравнения с разделяющимися переменными.

#### Варианты ответов:

- $y' = y \ln x$  (+)
- $y' = \frac{xy}{x+y}$
- $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$  .(+)
- $(y + y^2 - x^2y - x^2y^2)dx + (x^3y - 8y - x^3 + 8)dy = 0$  (+)

#### Вопрос

Тип вопроса: одиночный выбор

#### Формулировка вопроса:

Выбрать формулу, которая задает общее решение линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами  $y'' - 3y' + 2y = 0$ .

#### Варианты ответов:

- $y = C \cdot e^{2x}$
- $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}$  (+)
- $y = C \cdot \ln x$
- $y = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-x}$

#### Вопрос

Тип вопроса: множественный выбор

#### Формулировка вопроса:

Заданы дифференциальные уравнения и дополнительные условия, которым должны удовлетворять решения. Какие из следующих задач являются задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения?

**Варианты ответов:**

- $y' + xy = 2x, \quad y(1) = 2$  (+)
- $y'' + y \cos x = x^2, \quad y(1) = 2, y(3) = 0$
- $y'' + 3y' + \sqrt{x} = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$  (+)
- $y''' + y' = 0, \quad y(2) = 3, y'(2) = 1$
- $y^{IV} + y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = y'''(0) = 0$  (+)

#### 5.2.4. Типовые задания контрольной работы для оценки компетенции «ОПК-1»

##### Вариант 1.

Задача 1. Решить ДУ

а)  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ; б)  $y' - y \ln 2 = 2^{\sin x} (\cos x - 1) \ln 2$  (найти решение, ограниченное при  $x \rightarrow \infty$ );

в)  $y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}$ ; г)  $ydx - xdy = x^2 ydy$ ;

д)  $(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0$ ;

е)  $x^2 y' - y = x^2 e^{\frac{x-1}{x}}$ ; ж)  $y' - e^x y = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} - e^x \cos \frac{1}{x}$

(найти решение, удовлетворяющее условию:  $y \rightarrow 2$  при  $x \rightarrow -\infty$ );

з)  $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$ . и)  $y' + y + \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$ .

##### Вариант 2.

Задача 2. Напряжение и сопротивление цепи равномерно меняются в течение минуты соответственно от 0 до  $V$  и от 0 до  $R$ . Самоиндукция  $L$  цепи постоянна. Начальная сила тока  $I_0$ . Найдите зависимость силы тока от времени в течение первой минуты опыта.

Задача 3. Естественный прирост населения большого города пропорционален наличному количеству жителей и промежутку времени. Кроме того, население города увеличивается благодаря миграции; скорость прироста населения этим путем пропорциональна времени, отсчитываемому от момента, когда население города равнялось  $A_0$ . Найдите зависимость числа жителей города от времени.

#### 5.2.5. Типовые задания контрольной работы для оценки компетенции «УК -1»

##### Вариант 1

Задача 1. Представить картину поведения интегральных кривых уравнений:

$$a) y' = \frac{2y^2 - x^2}{xy}; \quad б) y' = \frac{\sqrt{y}}{x};$$

Задача 2. Решить уравнения. С помощью изоклин построить интегральные кривые:

$$a) y' = \sin(y - x); \quad б) \sqrt{1 - x^2} dy + \sqrt{1 - y^2} dx = 0; \quad в) 2x\sqrt{1 - y^2} dx + y dy = 0; \quad г) y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad y(1) = 1.$$

Задача 3. Решить уравнения:

$$a) (1 + e^{\frac{x}{y}}) dx + e^{\frac{x}{y}} (1 - \frac{x}{y}) dy = 0; \quad б) (2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0$$

$$в) y' = \frac{x - y + 1}{2x - 2y + 1};$$

Задача 4. Вычислите время падения мяча с высоты **16,3** м без начальной скорости с учетом сопротивления воздуха, пропорционального квадрату скорости. Найдите скорость в конце падения.

## Вариант 2

Задача 1. Представить картину поведения интегральных кривых уравнений:

$$a) y' = \frac{3x^2 - x}{y}; \quad б) y' = \frac{2\sqrt{y}}{3x^3};$$

Задача 2. Решить уравнения. С помощью изоклин построить интегральные кривые:

$$a) y' = \sin(y + x); \quad б) (xy - x) dx + (xy + x - y - 1) dy = 0;$$

$$в) y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad г) y' = \sqrt{4y^2 - 1}; \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Задача 3. Решить уравнения:

$$a) y' = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}; \quad б) (x - y) dx + (2y - x + 1) dy = 0;$$

$$в) (x + y) dx - (2x + 2y - 1) dy = 0; \quad .$$

Задача 4. В среду с постоянной температурой  $20^\circ$  поместили тело, нагретое до  $100^\circ$ . Через *10 минут* температура тела понизилась до  $70^\circ$ . Через какое время температура тела станет равной  $30^\circ$ .

### 5.2.6. Вопросы для коллоквиумов, собеседования

Вопросы для оценки компетенции «УК-1.»

Определения, формулировки: ДУ (дифференциальное уравнение) первого порядка: определение общего решения, частного решения, неявного решения (общий интеграл). Геометрия решений - изоклины.

Задача Коши. Формулировка теоремы существования.

1. Линейные ДУ первого порядка. Свойства решений однородного уравнения.
2. Линейные ДУ первого порядка. Решение неоднородного ДУ методом вариации произвольной постоянной. Свойства решений неоднородного ДУ
3. Метод Коши решения линейного ДУ первого порядка.
4. Уравнение в полных дифференциалах.

Вопросы для оценки компетенции «ОПК-1»:

5. Линейные ДУ  $n$ -го порядка. Линейный дифференциальный оператор порядка  $n$ . Линейно-зависимые и линейно – независимые функции.
6. Необходимое условие линейной зависимости функций.
7. Свойство решений линейного однородного ДУ
8. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (форм.)
9. Теорема об определителе Вронского для линейного однородного ДУ (альтернатива)
10. Формула Лиувилля – Остроградского.
11. Пространство решений линейного однородного ДУ. Теорема о существовании  $n$  линейно независимых решений. ФСР.
12. Теорема (утверждение) о существовании линейного однородного ДУ  $n$ -го порядка с данной ФСР
13. Неоднородное линейное ДУ  $n$ -го порядка. Теорема об общем решении.
14. Метод вариации произвольных постоянных.
15. Линейные однородные ДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения.
16. Линейные ДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней характеристического уравнения.
17. Линейные однородные ДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Вещественные решения вещественного уравнения. Лемма о ФСР.
18. Линейные неоднородные ДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Правая часть – квазиполином. Теорема о частном решении.
19. Резонансные явления при действии внешней периодической силы.
20. уравнение Эйлера.

#### 5.2.6. Типовые задачи (практические задания), выносимые на экзамен/зачет

##### Задачи для оценивания компетенции УК-1

Задача 1. Решить ДУ

а)  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ; б)  $y' - y \ln 2 = 2^{\sin x} (\cos x - 1) \ln 2$  (найти решение, ограниченное при  $x \rightarrow \infty$ );

в)  $y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}$ ; г)  $ydx - xdy = x^2 ydy$ ;

д)  $(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0$ ;

е)  $x^2 y' - y = x^2 e^{\frac{x-1}{x}}$ ; ж)  $y' - e^x y = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} - e^x \cos \frac{1}{x}$

(найти решение, удовлетворяющее условию:  $y \rightarrow 2$  при  $x \rightarrow -\infty$ );

з)  $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$ . и)  $y' + y + \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$ .

Задача 2.

Напряжение и сопротивление цепи равномерно меняются в течение минуты соответственно от 0 до  $V$  и от 0 до  $R$ . Самоиндукция  $L$  цепи постоянна. Начальная сила тока  $I_0$ . Найдите зависимость силы тока от времени в течение первой минуты опыта.

Задача 3. Естественный прирост населения большого города пропорционален наличному количеству жителей и промежутку времени. Кроме того, население города увеличивается благодаря миграции; скорость прироста населения этим путем пропорциональна времени, отсчитываемому от момента, когда население города равнялось  $A_0$ . Найдите зависимость числа жителей города от времени.

### Задачи для оценивания компетенции ОПК-1

- Задача 8. Найти общее решение уравнения: а)  $y''' - 2y'' - 3y' = 2x$ ; б)  $y^{IV} - y'' = 3$   
 в)  $y'' \cdot y^3 = 1$ ; г)  $2y \cdot y'' = y^2 + (y')^2$ ; д)  $y \cdot (xy'' + y') = x \cdot (y')^2 (1 - x)$   
 е)  $y''' - 2y'' - 3y' = 3e^{-x}$ ; ж)  $y^{IV} - y'' = 3x$ . з)  $y \cdot y'' - (y')^2 - 1 = 0$ ; и)  $y''' = 2(y'' - 1) \cdot \operatorname{ctg} x$ ;  
 к)  $x^2 \cdot yy'' + (y')^2 = 0$

Задача 9. Найти решение задачи Коши: а)  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

б)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

в)  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$ ;  $y(\frac{\pi}{4}) = y'(\frac{\pi}{4}) = 0$ .

Задача 10. Решить уравнение Эйлера а)  $x^3 y''' + xy' - y = 0$ .

б)  $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$ .

в)  $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2 \ln^2 x + 12x$ .

### 2.5.7. Примеры экзаменационных билетов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
 им. Н.И. Лобачевского  
 Институт/факультет \_ИИТММ  
 Кафедра Теории управления и динамики систем  
 Дисциплина Дифференциальные уравнения

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Свойства решений однородного линейного уравнения.
2. Линейные уравнения  $n$  – го порядка с переменными коэффициентами: уравнение Эйлера.
3. Найти общее решение задачи Коши:  $y'' + y = 2 \sin x \cdot \sin 2x$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .
4. Задача. Вычислите время падения мяча с высоты **16,3** м без начальной скорости с учетом сопротивления воздуха, пропорционального квадрату скорости. Найдите скорость в конце падения.

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

Экзаменатор \_\_\_\_\_

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского  
Институт/факультет \_ИИТММ  
Кафедра Теории управления и динамики систем  
Дисциплина Дифференциальные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: отыскание частных и общего решения.

2. Особые точки линейных систем второго порядка: узел, расположение фазовых траекторий.

3. Решить систему дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + t^2 + \sin t \\ \dot{y} = x + t + 2 \cos t \end{cases}$$

4. Задача. Напряжение и сопротивление цепи равномерно меняются в течение минуты соответственно от 0 до  $V$  и от 0 до  $R$ . Самоиндукция  $L$  цепи постоянна. Начальная сила тока  $I_0$ . Найдите зависимость силы тока от времени в течение первой минуты опыта.

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

Экзаменатор \_\_\_\_\_

---

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского  
Институт/факультет \_ИИТММ  
Кафедра Теории управления и динамики систем  
Дисциплина: Дифференциальные уравнения  
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. ДУ второго порядка: линейно – зависимые и независимые функции. Определитель Вронского. Теоремы об определителе Вронского для линейно – зависимых и независимых решений.

2. Особые точки линейных систем второго порядка: седло. Расположение фазовых траекторий.

3. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + e^{2t} \\ \dot{y} = x + \cos t \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

4. Задача. Естественный прирост населения большого города пропорционален наличному количеству жителей и промежутку времени. Кроме того, население города увеличивается благодаря миграции; скорость прироста населения этим путем пропорциональна времени, отсчитываемому от момента, когда население города равнялось  $A_0$ . Найдите зависимость числа жителей города от времени.

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

Экзаменатор \_\_\_\_\_



## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **а) основная литература:**

1. Понтрягин Л. С. - Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. для студентов мат. специальностей ун-тов. - М.: Наука, 1982. - 331 с. (186 экз).
2. Эльсгольц Л. Э. - Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник. - М.: Эдиториал УРСС, 2002. - 320 с., (80 экз).
3. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. - Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи: [учеб. пособие для вузов]. - М.: Высшая школа, 1989. - 382 с. (245 экз).
4. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие. - М.: Издательство ЛКИ, 2008. - 240 с. (82 экз).

### **б) дополнительная литература:**

1. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. - Дифференциальные уравнения: [учеб. для ун-тов по специальностям "Приклад. математика" и "Физика"]. - М.: Наука, 1985. - 231 с., (56 экз.)
2. Бибииков, Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 304 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book>
3. Дифференциальные уравнения. Практикум [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л.А. Альсевич [и др.]. — Электрон. дан. — Минск: "Вышэйшая школа", 2012. — 382 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65407#authors>
4. Веденяпин А.Д., Поливенко В.К. Практикум. Дифференциальные уравнения. В 2 частях. Часть 1. Дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним. Издательство "Физматлит", 2008, 160 стр. Электронная библиотечная система «Издательство Лань», 2016. — Раздел «Дифференциальные уравнения и теория устойчивости» URL: <https://e.lanbook.com/book/48196#authors>
5. Исследование динамических систем: построение фазовых портретов и бифуркационных диаграмм. Методическое пособие. / Губина Е.В., Кадина Е.Ю. Электронный образовательный ресурс № 989.15.08 в Фонде образовательных электронных программ ННГУ, URL: <http://www.unn.ru/books/resources.html>.. — свободный доступ.

### **в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы**

Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ, URL:

<http://www.unn.ru/books/resources.html>.. — свободный доступ.

1. Электронная библиотечная система «Издательство Лань», 2016, URL: <https://e.lanbook.com>
2. Дифференциальные уравнения: <https://openedu.ru/course/ITMOUniversity/DIFEQ/>
3. Дифференциальные уравнения (14 лекций): <https://teach-in.ru/course/differential-equations-p1>
4. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: <http://ed-online.ru/courses/214-Differentsialnye-uravneniya-i-kraevye-zadachi>
5. Дифференциальные уравнения: <https://intuit.ru/studies/courses/911/325/info>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения. Имеются компьютерные классы для выполнения лабораторных работ на 12 рабочих мест с установленным лицензионным программным обеспечением нужной комплектации (лаборатория 220 кафедры ТУиДС, корп.2). Презентационное оборудование для проведения обсуждений и компьютерных демонстраций (лаборатории 218, и 220 кафедры ТУиДС, корп.2).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Наличие рекомендованной литературы.

Используемое программное обеспечение:

1. Операционные системы семейства Microsoft Windows, – лицензия по подписке MicrosoftImagine;

2. Комплекс учебно-исследовательских программ по дисциплине «Дифференциальные уравнения», установленных в лаб. 220(2), 218(2) – разработанных в лаборатории «Динамика и оптимизация» каф.ТУиДС ИИТММ; разработка выполнена с использованием среды разработки C++Builder 2006 (приобретена в 2006/2007 гг при выполнении нац. проекта «Образование», ключ у системного администратора), а также среды разработки семейства Microsoft VisualStudio (лицензия по подписке MicrosoftImagine).

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: доцент кафедры ТУ и ДС \_\_\_\_\_ Губина Е.В.

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой ТУиДС, д.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Осипов Г.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 01.12.2021 года, протокол № 2.