

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Уравнения математической физики

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.01 - Математика

Направленность образовательной программы
Математика (общий профиль)

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.13 Уравнения математической физики относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-2: Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	<p>ОПК-2.1: Знает математические модели современных задач естествознания, техники, экономики и управления, основы разработки, анализа и внедрения новых математических моделей</p> <p>ОПК-2.2: Умеет разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении</p> <p>ОПК-2.3: Владеет навыками разработки, анализа и внедрения новых математических моделей</p>	<p>ОПК-2.1: Знает классификацию уравнений математической физики, основные задачи для уравнений математической физики, общие схемы основных методов математической физики, основные методы исследования корректности постановок задач</p> <p>ОПК-2.2: Умеет математически корректно ставить задачи, применять методы математической физики при решении задач, разрабатывать, использовать и исследовать математические модели в различных областях науки и техники</p> <p>ОПК-2.3: Имеет навыки математически корректной постановки задач математической физики, исследования математических моделей, применения методов математической физики при решении различных задач</p>	Контрольная работа	<p>Зачёт: Контрольные вопросы Задачи</p> <p>Экзамен: Контрольные вопросы Задачи</p>

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	7
Часов по учебному плану	252
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	64
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	64
- КСР	3
самостоятельная работа	85
Промежуточная аттестация	36 Экзамен, Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	
1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными	1	1		1	
2. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка	12	4	4	8	4
3. Вывод основных уравнений математической физики	9	3	2	5	4
4. Уравнение колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера	16	4	6	10	6
5. Задачи Коши и Гурса для уравнений гиперболического типа	16	4	6	10	6
6. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Цилиндрические волны	10	4	2	6	4
7. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Теорема о единственности	14	4	4	8	6
8. Метод Фурье для свободных и вынужденных колебаний струны	14	4	4	8	6
9. Задача Штурма–Лиувилля	15	4	4	8	7
10. Общая схема метода Фурье в многомерных задачах	18	4	6	10	8
11. Специальные функции математической физики	14	4	4	8	6
12. Уравнения параболического типа. Основные задачи для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Формула	20	6	6	12	8

Пуассона					
13. Уравнения эллиптического типа. Основные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина	22	6	8	14	8
14. Свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций	14	6	2	8	6
15. Элементы теории потенциала	18	6	6	12	6
Аттестация	36				
КСР	3			3	
Итого	252	64	64	131	85

Содержание разделов и тем дисциплины

5 семестр:

1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными
2. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка
3. Вывод основных уравнений математической физики
4. Уравнение колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера
5. Задачи Коши и Гурса для уравнений гиперболического типа
6. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Цилиндрические волны.
7. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Теорема о единственности
8. Метод Фурье для свободных и вынужденных колебаний струны
9. Задача Штурма–Лиувилля

6 семестр:

10. Общая схема метода Фурье в многомерных задачах
11. Специальные функции математической физики
12. Уравнения параболического типа. Основные задачи для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Формула Пуассона
13. Уравнения эллиптического типа. Основные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина
14. Свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций
15. Элементы теории потенциала

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

"Уравнения математической физики (Дерендяев Н.В.), Уравнения математической физики 5, Уравнения математической физики 6, <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6176>, <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1656>, <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1657>.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

Контрольная работа № 1

1. Привести уравнение к каноническому виду

$$9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 7u_x - 2u_y - u = 0.$$

2. Стержень, один конец которого ($x=0$) закреплен жестко, а другой ($x=l$) свободен, был подвергнут начальному растяжению

$$u(x, 0) = Ax, \quad 0 \leq x \leq l,$$

начальные скорости точек стержня равны нулю.

Найти растяжение точек стержня в момент $t = l/2a$

Контрольная работа №2

1. Решите смешанную задачу

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$

$$u(x, t)|_{t=0} = x(x - 2), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = 0; \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$$

2. Найти функцию $v(r, \varphi)$, гармоническую в единичном круге $0 < r < 1$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ такую, что $v(r, \varphi)|_{r=1} = \cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Контрольная работа решена верно или допущены незначительные ошибки
не зачтено	Контрольная работа не решена или допущены грубые ошибки

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компет	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно

индикатора достижения компетенций)	не зачтено		зачтено				
	Знания	Умения	Навыки	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки . Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
Знания	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки . Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
Умения	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
Навыки	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».

	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Классификация уравнений 2-ого порядка с постоянными коэффициентами с n независимыми переменными.
2. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными.
3. Основные задачи для уравнения малых поперечных колебаний струны.
4. Задача Коши для уравнений свободных колебаний струны. Формула Даламбера для решения задачи Коши.
5. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных.
6. Задача Коши для вынужденных колебаний бесконечной струны.
7. Задача о колебаниях полубесконечной струны с закрепленным концом.
8. Задача о колебаниях полубесконечной струны со свободным концом.
9. Задача о граничном режиме для полубесконечной струны.
10. Задача Коши для волнового уравнения в пространстве. Формула Пуассона.
11. Задача Коши для волнового уравнения на плоскости.
12. Принцип Гюйгенса.
13. Неоднородное волновое уравнение в пространстве. Запаздывающий потенциал.

14. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций и собственных значений.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы верны или содержат незначительные ошибки
не зачтено	Ответов нет или допущены грубые ошибки

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами с n независимыми переменными.
2. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными.
3. Приведение к каноническому виду уравнения гиперболического типа.
4. Приведение к каноническому виду уравнения параболического типа.
5. Приведение к каноническому виду уравнения эллиптического типа.
6. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка основных задач.
7. Задача Коши для уравнений свободных колебаний струны. Формула Даламбера для решения задачи Коши.
8. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных.
9. Задача Коши для уравнения вынужденных колебаний бесконечной струны.
10. Задача о колебаниях полуограниченной струны с закрепленным концом.
11. Задача о колебаниях полуограниченной струны со свободным концом.
12. Задача о граничном режиме для полуограниченной струны.
13. Теорема единственности решения начально-краевой задачи для волнового уравнения.
14. Задача Коши для волнового уравнения в пространстве. Формула Пуассона.
15. Цилиндрические волны. Принцип Гюйгенса.
16. Неоднородное волновое уравнение в пространстве. Запаздывающий потенциал.

17. Метод разделения переменных на примере решения начально-краевой задачи о свободных колебаниях струны.
18. Обоснование метода разделения переменных для начально-краевой задачи о свободных колебаниях струны.
19. Задача о вынужденных колебаниях струны.
20. Явление резонанса на примере задачи о вынужденных колебаниях струны.
21. Задача Штурма-Лиувилля. Вещественность собственных значений и собственных функций.
22. Задача Штурма-Лиувилля. Ортогональность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям.
23. Задача Штурма-Лиувилля. Линейная зависимость собственных функций, соответствующих одному собственному значению.
24. Задача Штурма-Лиувилля. Неотрицательность собственных значений при естественных граничных условиях.
25. Задача Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова.
26. Метод разделения переменных в многомерном случае. Свойства собственных значений и собственных функций.
27. Задача о колебаниях прямоугольной мембраны.
28. Задача о колебаниях круглой мембраны. Функции Бесселя.
29. Вывод уравнения теплопроводности в пространстве.
30. Постановка задач для уравнения теплопроводности.
31. Вывод уравнения теплопроводности в стержне.
32. Постановка основных задач для уравнения теплопроводности в стержне.
33. Теорема о максимуме и минимуме для уравнения теплопроводности.
34. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Фундаментальное решение и формула Пуассона.
35. Теорема о единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
36. Теорема о единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.
37. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности в стержне.
38. Гармонические функции. Постановка основных задач для уравнений Лапласа и Пуассона.
39. Первая и вторая формулы Грина.

40. Теорема о представлении произвольной функции (третья формула Грина).
41. Свойства гармонических функций. Теорема о среднем арифметическом.
42. Свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме и единственность решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
43. Теоремы о единственности решения основных задач для уравнения Пуассона.
44. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа и её свойства.
45. Задача Дирихле для шара. Формула Пуассона.
46. Понятие и свойства объёмного потенциала.
47. Понятие и свойства потенциала простого слоя.
48. Понятие и свойства потенциала двойного слоя.
49. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	знание основного и дополнительным материала без ошибок
отлично	знание основного материала без ошибок и погрешностей
очень хорошо	знание основного материала с незначительными погрешностями
хорошо	знание основного материалом с рядом заметных погрешностей
удовлетворительно	знание основного материала с рядом негрубых ошибок
неудовлетворительно	наличие грубых ошибок в основном материале
плохо	отсутствие знаний материала

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Используя формулу Д'Аламбера найти решение задачи

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, u|_{t=0} = e^{-x^2}, u_t|_{t=0} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0.$$

2. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области эллиптичности.

3. В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти его общее решение.

$$y u_{xx} + (x - y) u_{xy} - x u_{yy} = 0$$

4. Найти решение задачи Коши

$$u_{xy} + u_x = 0, u|_{y=x} = \sin x, u_x|_{y=x} = 1, |x| < \infty.$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Обоснованно получен верный ответ, возможно с погрешностями или негрубыми ошибками
не зачтено	Ответ не получен или содержит грубые ошибки

5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, t > 0, 0 < x < \pi, u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, u|_{t=0} = 2 \sin 3x, u_t|_{t=0} = 0$$

2. Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} - 9u_{xx} = e^{2t} \cos \frac{\pi x}{2}, t > 0, 0 < x < 1, u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0$$

3. Найти решение смешанной задачи

$$u_t - u_{xx} = 0, t > 0, 0 < x < 1, u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, u|_{t=0} = -4 \cos \frac{5\pi x}{2}$$

4. Найти решение смешанной задачи

$$u_t - a^2 u_{xx} = t \cos 2x, t > 0, 0 < x < \pi, u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, u|_{t=0} = 0$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Обоснованно получен верный ответ без ошибок и погрешностей, даны верные

Оценка	Критерии оценивания
	ответы на дополнительные вопросы по задаче.
отлично	Обоснованно получен верный ответ без ошибок и погрешностей
очень хорошо	Обоснованно получен верный ответ с незначительными погрешностями
хорошо	Получен верный ответ с рядом значительных погрешностей
удовлетворительно	Допущены негрубые ошибки при решении задачи
неудовлетворительно	Задача решена с грубыми ошибками
плохо	Задача не решена

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Тихонов Андрей Николаевич. Уравнения математической физики : учеб. пособие для вузов. - Изд. 5-е, стер. - М. : Наука, 1977. - 736 с. - 1.80., 56 экз.
2. Сборник задач по уравнениям математической физики / ВЛАДИМИРОВ В.С., ВАШАРИН А.А., КАРИМОВА Х.Х., МИХАЙЛОВ В.П., СИДОРОВ Ю.В., ШАБУНИН М.И. - Москва : Физматлит, 2004., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=639801&idb=0>.
3. Калинин А. В. Введение в современные методы математической физики : учебное пособие / Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2014. - 120 с. - Рекомендовано учёным советом механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся в академической магистратуре по направлениям подготовки 01.04.01 «Математика», 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 01.04.03 «Механика и математическое моделирование». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Физика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729777&idb=0>.
4. Жидков А. А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными : электронное учебно-методическое пособие / Жидков А. А., Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. - 82 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730395&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Дерендяев Николай Васильевич. Проекционный метод Фурье : учебно-методическое пособие / Н. В. Дерендяев, А. В. Калинин ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 75 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?>

Action=FindDocs&ids=851280&idb=0.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6176>, <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1656>,
<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1657>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.