

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Эргодическая теория

Уровень высшего образования
Магистратура

Направление подготовки / специальность
01.04.01 - Математика

Направленность образовательной программы
Фундаментальная математика и приложения

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.15 Эргодическая теория относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, выработать стратегию действий	УК-1.1: Знать методы критического анализа проблемных ситуаций УК-1.2: Уметь выработать стратегию действий при возникновении критических ситуаций УК-1.3: Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций	УК-1.1: ЗНАТЬ основные определения и формулировки теорем эргодической теории в различных фазовых пространствах . УК-1.2: УМЕТЬ применять полученные знания при исследовании конкретных динамических систем. УК-1.3: ВЛАДЕТЬ методами моделирования систем со сложной динамикой и соответствующих инвариантов энтропийного типа	Собеседование	Зачёт: Контрольные вопросы
ОПК-2: Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1: Знает математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении ОПК-2.2: Умеет модифицировать, анализировать и реализовывать математические модели в современном естествознании, технике,	ОПК-2.1: ЗНАТЬ основные термины, определения и формулировки теорем эргодической теории. ОПК-2.2: УМЕТЬ применять полученные знания при построении инвариантных мер (плотностей вероятности) в	Собеседование	Зачёт: Контрольные вопросы

	экономике и управлении ОПК-2.3: Владеет навыками модификации, анализа и реализации новых математических моделей в современном естествознании, технике, экономике и управлении	динамических системах со сложным поведением траекторий. ОПК-2.3: ВЛАДЕТЬ методами конструирования математических моделей рассматриваемых прикладных задач и делать заключение о характере (регулярности или хаотичности) реального процесса		
--	--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	0
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
самостоятельная работа	75
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Введение	19		4	4	15

Тема 2. Символическая динамика	19		4	4	15
Тема 3. Энтропийная теория дискретных динамических систем	23		8	8	15
Тема 4. Классические теоремы эргодической теории	23		8	8	15
Тема 5. Эргодическая теория одномерных отображений	23		8	8	15
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	108	0	32	33	75

Содержание разделов и тем дисциплины

I. Введение .

1. Исторический обзор эргодической теории. Динамическая система как действие группы на фазовом пространстве. Потoki и каскады, динамические системы с более общей группой преобразований.
2. Измеримое пространство и сохраняющие меру преобразования на нем. Примеры динамических систем в эргодической теории.

II. Символическая динамика .

1. Схема применения символической динамики в конкретных динамических системах. Пространство символических последовательностей и его свойства. Отображение сдвига на пространстве односторонних и двусторонних символических последовательностей (сдвиги Бернулли).
2. Топологические марковские цепи и их свойства. Разложимые и неразложимые топологические марковские цепи, периодические и ациклические цепи. Примеры.
3. Теорема Перрона-Фробениуса.
4. Применение теоремы Перрона-Фробениуса для подсчета асимптотики периодических точек. Динамическая дзета-функция Артина-Мазура.

III. Энтропийная теория дискретных динамических систем

1. Определение топологической энтропии непрерывного отображения компакта при помощи открытых покрытий (по Адлеру-Конхейму-МакЭндрю). Основные свойства топологической энтропии.
2. Топологическая энтропия как инвариант топологической сопряженности. Образующие покрытия и их применение для вычисления топологической энтропии.
3. Примеры вычисления топологической энтропии для топологических Марковских цепей и одномерных отображений.
4. Определение топологической энтропии при помощи разделенных и стягивающих подмножеств (по Боуэну). Эквивалентность различных определений.
5. Метрическая энтропия и её свойства. Вариационный принцип. Мера с максимальной энтропией.

IV. Классические теоремы эргодической теории

1. Теорема Пуанкаре о возвращении и её обобщения.
2. Теорема Крылова-Боголюбова о существовании и построении инвариантной меры. Строго эргодические динамические системы.
3. Эргодические меры и преобразования. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина и её приложения.

4. Свойства сильного и слабого перемешивания. Примеры.

V. Эргодическая теория для одномерных необратимых отображений

1. Кусочно-монотонные отображения: символическая динамика и существование инвариантных мер.
2. Инвариантные меры, абсолютно непрерывные по отношению к мере Лебега.
3. Кусочно-монотонные отображения постоянного наклона.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Эргодическая теория (МАТЕМАТИКА) (М.И. Малкин), <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=5159>.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции УК-1:

2. Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем?	УК-1
3. Почему топологически сопряженные системы имеют одинаковые периоды периодических точек?	УК-1
4. Дайте определения следующих инвариантных множеств динамической системы: омега-предельное множество, множество рекуррентных множеств, <u>неблуждающее</u> множество. Какие из этих множеств являются частью других?	УК-1
5. Транзитивные системы в топологической динамике: дайте различные определения. Что такое топологическое перемешивание? Приведите примеры транзитивных и перемешивающих систем.	УК-1

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

18. Нелинейные гомеоморфизмы окрестности: связь между гладкими и топологическими свойствами (теоремы Данжуа).	ОПК-2
19. Потoki на торе без состояний равновесия.	ОПК-2
20. Условия гиперболичности и подковы Смейла.	ОПК-2
21. Символическая динамика: общий подход.	ОПК-2
22. Топологическая схема Бернулли: динамические свойства и хаотичность.	ОПК-2
23. Топологические марковские цепи (ТМЦ) и их классификация. Связь между свойствами матрицы переходов и динамическими свойствами ТМЦ.	ОПК-2

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы верны или есть незначительные ошибки.
не зачтено	Ответов нет или есть грубые ошибки.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном

			все задания, но не в полном объеме	Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	в полном объеме, но некоторые с недочетами	и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

9. Определение хаоса по Ли-Йорке. Приведите примеры хаотических по Ли-Йорке систем.	УК-1
10. Динамические свойства поворота окружности?	УК-1
11. Минимальные системы: определение и примеры минимальных каскадов на окружности. Какие из поворотов окружности являются минимальными?	УК-1
12. Сдвиги на многомерном торе: необходимые и достаточные условия транзитивности.	УК-1
13. Потoki на многомерном торе с постоянным векторным полем: необходимые и достаточные условия транзитивности.	УК-1

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

27. Топологическая энтропия: определение через открытые покрытия.	ОПК-2
28. Свойства топологической энтропии.	ОПК-2
29. Вычисление топологической энтропии с помощью образующих покрытий	ОПК-2
30. Примеры вычисления топологической энтропии для ТМЦ	ОПК-2
31. Определение топологической энтропии по Боуэну в терминах разделенных множеств и сетей	ОПК-2
32. Эквивалентность различных определений топологической энтропии.	ОПК-2
33. Формулы для вычисления топологической энтропии кусочно-монотонных отображений отрезка.	ОПК-2
34. Отображения отрезка с положительной энтропией: наличие подков.	ОПК-2
35. Что такое динамическая система в эргодической теории:	ОПК-2

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы верны или есть незначительные ошибки.
не зачтено	Ответов нет или есть грубые ошибки.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Каток Анатолий Борисович. Введение в теорию динамических систем : с обзором последних достижений : пер. с англ. / под ред. А. С. Городецкого. - М. : Изд-во МЦНМО, 2005. - 464 с. - ISBN 5-94057-063-1 : 79.00., 3 экз.

Дополнительная литература:

1. Биллингслей Патрик. Эргодическая теория информация / пер. с англ. Н. Д. Светловой ; под ред. Б. М. Гуревича. - М. : Мир, 1969. - 238 с. : ил. - 0.85., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=5159>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Малкин Михаил Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.