

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Численные методы математического программирования

---

Уровень высшего образования

Специалитет

---

Направление подготовки / специальность

01.05.01 - Фундаментальные математика и механика

---

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.07.02 Численные методы математического программирования относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-12: Владение навыками применения математически сложных алгоритмов в современных специализированных программных комплексах, реализации в них собственных методов, моделей и алгоритмов	ПК-12.1: Знает теоретические основы фундаментальных компьютерных наук ПК-12.2: Умеет ориентироваться в современных алгоритмах компьютерной математики ПК-12.3: Имеет практический опыт использования математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах, включая реализацию в них собственных методов и моделей	ПК-12.1: Знать численные методы математического программирования и методику их реализации и визуализации на языке программирования MATLAB.  ПК-12.2: Уметь решать задачи математического программирования численно с применением современной вычислительной техники и языков программирования.  ПК-12.3: Владеть опытом численного решения задач математического программирования с применением современной вычислительной техники и языка программирования MATLAB.	Отчет по лабораторным работам	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>5</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>

в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>32</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>64</b>
- КСР	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>46</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора торные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Введение.	9	2	4	6	3
Тема 2. Классификация численных методов оптимизации.	9	2	4	6	3
Тема 3. Основы выпуклого анализа.	9	2	4	6	3
Тема 4. Общая задача минимизации.	9	2	4	6	3
Тема 5. Задание целевой функции как подпрограммы в системе MATLAB.	9	2	4	6	3
Тема 6. Метод наискорейшего спуска.	9	2	4	6	3
Тема 7. Методы сопряженных градиентов.	9	2	4	6	3
Тема 8. Методы Ньютона и Ньютона-Рафсона.	9	2	4	6	3
Тема 9. Квазиньютоновские методы.	9	2	4	6	3
Тема 10. Методы доверительной области.	9	2	4	6	3
Тема 11. Методы прямого поиска.	9	2	4	6	3
Тема 12. Методы решения нелинейной задачи наименьших квадратов.	9	2	4	6	3
Тема 13. Симплекс-метод для решения задач линейного программирования.	9	2	4	6	3
Тема 14. Простейшие методы нелинейной условной оптимизации.	9	2	4	6	3
Тема 15. Метод квадратичного штрафа.	8	2	4	6	2
Тема 16. Метод модифицированной функции Лагранжа.	8	2	4	6	2
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	180	32	64	98	46

## Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Введение. Постановки прикладных задач и их формализация. Классификация задач математического программирования. Терминология.

Тема 2. Классификация численных методов оптимизации.

Тема 3. Основы выпуклого анализа. Определение и основные свойства выпуклых множеств. Проекция на выпуклое множество. Отделимость. Возможные направления. Одномерные сечения. Определение и основные свойства выпуклых функций. Критерии выпуклости в классах дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций. Понятие сильной выпуклости. Точки минимума выпуклых функций.

Тема 4. Общая задача минимизации. Постановка, понятие глобального и локального минимума. Достаточные условия существования глобального минимума. Необходимые и достаточные условия оптимальности.

Тема 5. Задание целевой функции как подпрограммы в системе MATLAB. Особенности ее вызова для случаев, когда требуется или не требуется градиент, гессиан. Построение линий уровня и сеточного графика функции двух переменных в системе MATLAB.

Тема 6. Метод наискорейшего спуска. Овражный эффект. Визуализация работы метода в системе MATLAB.

Тема 7. Методы сопряженных градиентов. Метод тяжелого шарика. Методы сопряженных направлений и сопряженных градиентов для квадратичных функций и в общем случае. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса.

Тема 8. Методы Ньютона и Ньютона-Рафсона. Способы проверки матрицы на положительную определенность.

Тема 9. Квазиньютоновские методы: DFP, Бройдена, BFS, BFGS.

Тема 10. Методы доверительной области.

Тема 11. Методы прямого поиска: симплексный метод Нелдера-Мида и метод конфигураций Хука-Дживса.

Тема 12. Методы решения нелинейной задачи наименьших квадратов: методы Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта.

Тема 13. Симплекс-метод для решения задач линейного программирования: задача ЛП в канонической форме, основная идея метода, исходные предпосылки, основной алгоритм (пересчет симплекс-таблиц). Метод искусственного базиса для поиска начального допустимого плана. Причины заикливания симплекс-метода и понятие об антициклах.

Тема 14. Простейшие методы нелинейной условной оптимизации: метод проекции градиента, метод условного градиента.

Тема 15. Метод квадратичного штрафа.

Тема 16. Метод модифицированной функции Лагранжа.

## 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Сумин В.И. Классические разделы теории конечномерных экстремальных задач. Часть 1. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Методическая разработка. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2001 (142).
2. Сумин В.И. Элементарный выпуклый анализ. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (170).
3. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).
4. Чернов А.В. Численные методы одномерной минимизации. Н.Новгород: ННГУ, 2009

(62).

5. Чернов А.В. Численные методы безусловной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (52).

6. Чернов А.В. Численные методы условной минимизации функций многих переменных. Н. Новгород: ННГУ, 2010 (70).

## **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

### **5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

#### **5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Отчет по лабораторным работам) для оценки сформированности компетенции ПК-12:**

##### **Темы лабораторных работ:**

1. Построение сеточного графика и линий уровня функции двух переменных.
2. Метод наискорейшего спуска.
3. Метод Ньютона-Рафсона.
4. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса.
5. Методы DFP и BFGS.
6. Простейший метод доверительной области.
7. Метод Нелдера-Мида.
8. Метод конфигураций Хука-Дживса.
9. Метод Гаусса-Ньютона.
10. Симплекс-метод.
11. Метод проекции градиента.
12. Метод условного градиента.
13. Метод квадратичного штрафа.
14. Метод модифицированной функции Лагранжа.
15. SQP-метод.
16. Обобщенный метод приведенного градиента.

**Примечание.** Каждый студент получает индивидуальные задания по каждой из приведенных выше тем, самостоятельно пишет программу, реализующую соответствующий метод в

системе MATLAB, и минимизирует с его помощью конкретную функцию из индивидуального задания, после чего пишет письменный отчет и защищает его на семинарском занятии.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Отчет по лабораторным работам)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	задание выполнено, корректный результат получен, отчет представлен и правильно оформлен
не зачтено	задание не выполнено, либо получен некорректный результат, отчет либо не представлен, либо неправильно оформлен

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач
---------------	--	---	--	--	--	--	---

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-12

Доказать, что решением задачи  $\varphi(x) = (c, x) \rightarrow \min, x \in X = \{x \in R^n : |x - z| \leq r\}$ ,

$c \neq 0$ , является  $\bar{x} = z - \frac{c}{|c|}r$ . В каком из методов условной оптимизации

приходится решать подобного сорта задачи?

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	умеет решать задачи любого уровня сложности и приводить теоретическое обоснование решения со ссылками на теоремы из лекционного курса, способен дать полные формулировки используемых теорем.
отлично	умеет решать задачи типового уровня и приводить теоретическое обоснование решения со ссылками на теоремы из лекционного курса, способен дать полные формулировки используемых теорем
очень хорошо	умеет решать задачи типового уровня и приводить теоретическое обоснование решения со ссылками на теоремы из лекционного курса
хорошо	умеет решать задачи типового уровня и отвечать на вопросы по ходу решения, знает основные понятия и формулировки
удовлетворительно	умеет решать задачи простейшего уровня, знает основные понятия
неудовлетворительно	решает задачи простейшего уровня с серьезными недочетами, не знает основных понятий
плохо	полностью неспособен решать задачи простейшего уровня, не знает основных понятий

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-12

1. Привести примеры прикладных задач, формализуемых как задача безусловной конечномерной минимизации.
2. Привести примеры прикладных задач, формализуемых как задача условной конечномерной минимизации.
3. Привести классификацию численных методов оптимизации.
4. Описать синтаксис основных команд системы MATLAB, используемых для построения линий уровня и сеточного графика функции двух переменных.
5. Описать технологию визуализации работы численных методов безусловной двумерной оптимизации в системе MATLAB.
6. Описать технологию визуализации допустимого множества задачи условной двумерной оптимизации в системе MATLAB.
7. Понятие выпуклого множества. Свойства выпуклых множеств.
8. Понятие проекции точки на множество. Критерий проекции на выпуклое множество.
9. Понятие выпуклой функции. Свойства выпуклых функций.
10. Критерий выпуклости в классе дифференцируемых функций.
11. Понятие положительной и неотрицательной определенности матрицы. Критерий Сильвестра.
12. Критерий выпуклости в классе дважды дифференцируемых функций.
13. Точки минимума выпуклых функций и их свойства.



14. Критерий оптимальности в классе выпуклых дифференцируемых функций.
15. Понятие возможного направления. Понятие направления спуска. Необходимое условие оптимальности общего вида в общей задаче минимизации.
16. Необходимое и достаточное условия направления спуска.
17. Необходимое условие оптимальности первого порядка в общей задаче минимизации.
18. Градиентные методы (в частности, простейший с фиксированным шагом, и метод наискорейшего спуска). Овражный эффект (объяснение с помощью геометрической иллюстрации).
19. Три теоремы о сходимости градиентных методов (одна – с док-вом).
20. Минимизация квадратичных функций: методы сопряженных направлений (с выводом итерационной формулы на основе леммы о линейной независимости сопряженных направлений).
21. Минимизация квадратичных функций: метод сопряженных градиентов как метод сопряженных направлений.
22. Метод сопряженных градиентов для случая неквадратичной функции (методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса).
23. Методы Ньютона (идея метода; алгоритм; теорема о сходимости; достоинства и недостатки) и Ньютона-Рафсона.
24. Понятие о квазиньютоновских методах.
25. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: каноническая задача ЛП. Приведение задач ЛП к каноническому виду.
26. Итерационный алгоритм симплекс-метода в невырожденном случае. Итерационные формулы. Симплекс-таблица (СТ). Анализ и пересчет СТ.
27. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: отыскание начальной вершины методом искусственного базиса.
28. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: понятие вырожденной вершины. Зацикливание и антициклин.
29. Метод проекции градиента.
30. Метод условного градиента.
31. Метод квадратичного штрафа.
32. Метод модифицированной функции Лагранжа.

#### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Знает все понятия и формулировки всех теорем лекционного курса, и свободно в них ориентируется, понимая все явные и неявные взаимосвязи, а также все алгоритмы и их идею
отлично	Знает все понятия и формулировки всех теорем лекционного курса, а также все алгоритмы и их идею
очень хорошо	Знает все понятия и формулировки всех основных теорем лекционного курса, а также все алгоритмы

Оценка	Критерии оценивания
хорошо	Знает все основные понятия и формулировки всех основных теорем лекционного курса, а также основные алгоритмы
удовлетворительно	Знает все основные понятия и основные факты, а также идею основных алгоритмов
неудовлетворительно	Не знает основных понятий и/или основных фактов, и/или основных алгоритмов
плохо	Не знает основных понятий, не знает основных фактов, не знает основных алгоритмов

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

### Основная литература:

1. Сухарев Алексей Григорьевич. Курс методов оптимизации. - М. : Наука, 1986. - 325, [1] с. : ил. - 1.80., 3 экз.
2. Васильев Федор Павлович. Численные методы решения экстремальных задач : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Приклад. математика". - Изд. 2-е, перераб. и доп. - М. : Наука, 1988. - 549 с. : ил. - ISBN 5-02-013796-0 (в пер.) : 1.60., 178 экз.
3. Чернов Андрей Владимирович. Численные методы оптимизации : учебно-методическое пособие / А. В. Чернов ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2024. - 164 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=892332&idb=0>.
4. Чернов А. В. Численные методы оптимизации / Чернов А. В. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2024. - 164 с. - Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика». - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Ветеринария и сельское хозяйство., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=927217&idb=0>.

### Дополнительная литература:

1. Поляк Борис Теодорович. Введение в оптимизацию. - М. : Наука, 1983. - 384 с. : ил. - 2.40., 12 экз.

### Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 486.12.06
2. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 486.12.06
3. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 1174.16.06

4. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 1173.16.06

5. <http://www.lib.unn.ru/ebs.html>

система MATLAB

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.05.01 - Фундаментальные математика и механика.

Автор(ы): Чернов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Баландин Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Иванченко Михаил Васильевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.