

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

**Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education  
«National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Working programme of the discipline**

Nonlinear Logic

---

Higher education level

Bachelor degree

---

Area of study / speciality

02.03.02 - Fundamental Informatics and Information Technology

---

Focus /specialization of the study programme

General Profile

---

Mode of study

full-time

---

Nizhny Novgorod

Year of commencement of studies 2024

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.06 Нелинейная Логика относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2: Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3: Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	УК-1.1: Знать основные подходы к моделированию математических теорий; метод элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости теорий; основные модели вычислений; понятия разрешимого отношения и вычислимой функции; понятие частично рекурсивной функции и формулировку тезиса Чёрча; основные принципы измерения алгоритмической сложности задач; определения классов $P$ и $NP$ ; основы интуиционистской и модальной логик, лямбда-исчисления; формулировку теоремы Чёрча-Россера о ромбическом свойстве бета-редукции /  Students must know the basic approaches to modeling of mathematical theories; quantifier elimination method to prove algorithmic solvability of theories; main calculating models; concepts of solvable relation and computable function; concept of partially recursive function and formulation of Church thesis; main principles to measure	Задачи Тест	Зачёт: Задачи

		<p>algorithmic complexity of problems; definitions of classes <math>P</math> and <math>NP</math>; basics of intuitionistic and modal logics, of lambda-calculus; formulation of Church-Rosser theorem on rhombic property of beta-reduction</p> <p>УК-1.2:  Уметь применять метод элиминации кванторов для нескольких математических теорий; разрабатывать простейшие программы на машине Тьюринга и оценивать их сложность; приводить примеры разрешимых и неразрешимых отношений, вычислимых и невычислимых функций; приводить примеры задач из классов <math>P</math> и <math>NP</math> /</p> <p>Students must be able to apply quantifier elimination method for several mathematical theories; to develop the simplest programs on Turing machine and to estimate their complexity; to give examples of solvable and unsolvable relations, of computable and uncomputable functions; to give examples of problems from the classes <math>P</math> and <math>NP</math></p> <p>УК-1.3:  Уметь строить простейшие интуиционистские и модальные фреймы Крипке, находить оценивание высказываний на этих фреймах; строить редукционные цепочки для простейших лямбда-термов; производить элиминацию лямбда-абстрактора для простейших комбинаторов /</p> <p>Students must be able to construct the simplest intuitionistic and modal Kripke frames, to find evaluation for</p>		
--	--	--	--	--

		<i>propositions on these frames; to construct reduction chains for the simplest lambda-terms; to perform lambda-abstructor elimination for the simplest combinators</i>		
--	--	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>5</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
<b>самостоятельная работа</b>	<b>115</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий / Applications of the first-order logical language to the modeling of mathematical theories	32	6	6	12	20
Тема 2. Метод элиминации кванторов / Quantifier elimination method	32	6	6	12	20
Тема 3. Изучение моделей вычислений на примере машины Тьюринга / Study of calculation models on the example of Turing machine	32	6	6	12	20

Тема 4. Интуиционистские и модальные логики / Intuitionistic and modal logics	27	4	4	8	19
Тема 5. Лямбда-исчисление и логика комбинаторов / Lambda calculus and logic of combinators	56	10	10	20	36
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	180	32	32	65	115

### Contents of sections and topics of the discipline

1. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий. Аксиоматические и структурные теории, примеры, их развитие. Понятие теорем и элементарных теорий /  
Applications of the first-order logical language to the modeling of mathematical theories. Axiomatic and structural theories, examples, their development. The notion of theorems and elementary theories.
2. Свойства элементарных теорий: полнота, алгоритмическая разрешимость. Метод элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости некоторых теорий (общий алгоритм) /  
Properties of elementary theories: completeness, algorithmic solvability. A method of quantifier elimination to prove the algorithmic solvability of certain theories (general algorithm).
3. Основной этап метода элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости теории плотного линейного порядка без конечных точек /  
Main stage of quantifier elimination method to prove algorithmic solvability for the theory of dense linear order without end points.
4. Основные этапы метода элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости теории целых чисел (алгоритм Пресбургера) /  
Main stages of quantifier elimination method to prove algorithmic solvability for the theory of integers (Presburger's algorithm).
5. Модели вычислений, машина Тьюринга: представление и преобразование информации, тьюринговы программы. Алгебра тьюринговых программ. Методика доказательства правильности тьюринговых программ /  
Computing models, Turing machine: representation and transformation of information, Turing programs, their algebra. Method for the proof of correctness for Turing programs.
6. Вычислимость и разрешимость: словарные функции и словарные отношения, полурешимые и разрешимые отношения, вычислимые функции /  
Computability and solvability: word functions and word relations, semi-solvable and solvable relations, computable functions
7. Понятие частично-рекурсивных функций. Тезис Черча /  
The concept of partially recursive functions. Church thesis
8. Примеры невычислимой по Тьюрингу функции и алгоритмически неразрешимого отношения /  
Examples of incomputable Turing function and algorithmically unsolvable relation.
9. Измерение алгоритмической сложности задач: временная и пространственная сложность алгоритмов /

Measurement of algorithmic complexity of problems: time complexity and space complexity of algorithms.  
Upper and lower bounds on time complexity

10. Классы P и NP. Примеры задач из этих классов. Полиномиальная сводимость одной задачи к другой, NP-полные и NP-трудные задачи /  
Classes P and NP. Examples of tasks from these classes. Polynomial reducibility of one problem to another, NP-complete and NP-hard problems

11. Интуиционистские и модальные логики, их аксиоматика. Семантика моделей (фреймов) Крипке /  
Intuitionistic and modal logics, their axioms. Semantics of Kripke models (frames).

12. Лямбда-исчисление. Понятие лямбда-терма. Преобразования альфа-конверсии и бета-редукции с лямбда-термами. Редексы и редукционные цепочки /  
Lambda-calculus. Concept of lambda-term. Transformations of alpha-conversion and beta-reduction with lambda-terms. RedEx and reduction chains

13. Лямбда-исчисление. Понятие нормальной формы лямбда-терма. Основные стратегии редуцирования к нормальной форме. Теорема Чёрча-Россера /  
Lambda-calculus. Concept of normal form for lambda-term. Basic strategies for reducing to normal form. Church-Rosser theorem

14. Лямбда-исчисление. Понятие комбинатора. Несколько важных комбинаторов, их свойства /  
Lambda-calculus. Concept of combinator. Several important combinators, their properties

15. Лямбда-исчисление. Понятие неподвижной точки терма. Теорема о существовании неподвижной точки у любого лямбда-терма /  
Lambda-calculus. Concept of stable point of a term. Theorem on existence of stable point for any lambda-term

16. Лямбда-исчисление. Понятие комбинатора неподвижной точки, теорема его существования. Парадоксальный комбинатор Карри и комбинатор неподвижной точки Тьюринга /  
Lambda-calculus. Concept of stable point combinator, theorem on its existence. Paradoxical Curry combinator and Turing stable point combinator

17. Лямбда-исчисление. Теорема о комбинаторной полноте. Реализация рекурсивных функций в классическом лямбда-исчислении /  
Lambda-calculus. Theorem on combinatory completeness. Realization of recursive functions in classical lambda-calculus

18. Реализация арифметических и логических функций в рамках классического лямбда-исчисления. Реализация массивов и связанных списков /  
Realization of arithmetic and logical functions in classical lambda-calculus. Realization of arrays and linked lists

19. Исчисление конверсий и экстенциональное лямбда-исчисление. Аксиомы экстенциональности и эта-конверсии, их эквивалентность /  
Conversion calculus and extensional lambda-calculus. Axioms of extensionality and eta-conversion, their equivalence

20. Элиминация абстрактора в экстенциональном лямбда-исчислении /  
Lambda-abtractor elimination in extensional lambda-calculus

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Sorochan Sergei Vladimirovich. Fundamentals of Graph Theory = Основы теории графов : teaching aid / S. V. Sorochan ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2023. - 59 p. - Текст : электронный.  
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=853269&idb=0>

2. Sorochan Sergei Vladimirovich. Functions of the Logic Algebra. Canonical Types of Boolean Formulae = Функции алгебры логики. Канонические виды булевых формул : teaching aid / S. V. Sorochan ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2023. - 41 p. - Текст : электронный.  
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=853270&idb=0>

#### 5. Assessment tools for ongoing monitoring of learning progress and interim certification in the discipline (module)

##### 5.1 Model assignments required for assessment of learning outcomes during the ongoing monitoring of learning progress with the criteria for their assessment:

##### 5.1.1 Model assignments (assessment tool - Tasks) to assess the development of the competency УК-1:

1. Выясните, является ли предложение  $A$  теоремой теории плотного линейного порядка без концевых точек: /

Find out whether the sentence  $A$  is theorem of the theory of dense linear order without end points:

$$A = \forall z \forall y \forall x [(\neg R(z, y) \vee R(y, x)) \& [\neg R(z, x) \vee R(x, y)]]$$

2. Применяя алгоритм Пресбургера, выясните, является ли предложение  $A$  теоремой теории целых чисел с отношениями делимости: /

Applying Presburger algorithm, find out whether the sentence  $A$  is theorem of the theory of integers with divisibility predicates:

$$T = (\mathbb{Z}; <, D_2, D_3, \dots; +, -, 0, 1):$$

$$A = \exists y \forall x [(15y + 11 < 5x) \& (4x < 12y + 13) \& D_4(3x - 1) \& D_6(5x - 1) \& D_9(7x - 2)]$$

3. Напишите программу для машины Тьюринга, которая перерабатывала бы входное слово  $m$  над алфавитом  $A = \{ 1 \}$  в выходное слово  $[m/3]$  (здесь  $m$  – фиксированное, но заранее не известное натуральное число). Используя методику Флойда, докажите правильность работы написанной программы. Найдите верхние оценки ее пространственной и временной сложности /

Write a program for Turing machine that processes an input word  $m$  under the alphabet  $A = \{ 1 \}$  into the output word  $[m/3]$  (here  $m$  is fixed unknown number). Using Floyd technique, prove the correctness of this program. Find upper bounds for its space complexity and time complexity.

#### Assessment criteria (assessment tool — Tasks)

Grade	Assessment criteria
pass	Верно решено не менее 60% задач
fail	Решено неправильно или не решено более 40% задач

#### 5.1.2 Model assignments (assessment tool - Test) to assess the development of the competency УК-1:

1. Какие из приведенных ниже лямбда-термов имеют нормальную форму? /

Which of the following lambda-terms have normal form?

a)  $(\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$

б)  $(\lambda x. x y) (\lambda x. x y)$

в)  $(\lambda x. x x) (\lambda x. x y)$

г)  $(\lambda x. x y) (\lambda x. x x)$

2. Какой из приведенных ниже лямбда-термов является нормальной формой для терма

$\lambda y. (\lambda x. x x) (\lambda x. x y)$  ? /

Which of the following lambda-terms is normal form for the term  $(\lambda x. x x) (\lambda x. x y)$  ?

a)  $\lambda y. (\lambda x. x y) (\lambda x. x y)$

б)  $\lambda y. (\lambda x. x y) y$

в)  $\lambda y. \lambda x. x y$

г)  $\lambda y. y y$

#### Assessment criteria (assessment tool — Test)

Grade	Assessment criteria
pass	Верно решено не менее 60% тестовых заданий
fail	Решено неправильно или не решено более 40% тестовых заданий



Grade	Assessment criteria

## 5.2. Description of scales for assessing learning outcomes in the discipline during interim certification

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Scale of assessment for interim certification

Grade		Assessment criteria
pass	outstanding	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "outstanding", the knowledge and skills for the relevant competencies have been demonstrated at a level higher than the one set out in the programme.
	excellent	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "excellent",
	very good	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "very good",
	good	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "good",
	satisfactory	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "satisfactory", with at least one competency developed at the "satisfactory" level.
fail	unsatisfactory	At least one competency has been developed at the "unsatisfactory" level.
	poor	At least one competency has been developed at the "poor" level.

### 5.3 Model control assignments or other materials required to assess learning outcomes during the interim certification with the criteria for their assessment:

#### 5.3.1 Model assignments (assessment tool - Tasks) to assess the development of the competency УК-1

##### Задача 1.

Выясните, является ли предложение  $A$  теоремой теории плотного линейного порядка без концевых точек: /

Find out whether the sentence  $A$  is theorem of the theory of dense linear order without end points:

$$A = \forall u \forall v \forall x \forall y [R(u, x) \vee [\neg R(v, x) \wedge R(x, y)]]$$

##### Задача 2.

Выясните, является ли предложение  $A$  теоремой теории действительных чисел: /

Find out whether the sentence  $A$  is theorem of the theory of real numbers:

$$T = (R; =, <, +, \cdot, 0, 1):$$

$$A = \forall x \forall y \forall z [(5x + y < 2z) \wedge (5z < 3x + 2y) \wedge (3z < 4x + 3y)]$$

##### Задача 3.

Применяя алгоритм Пресбургера, выясните, является ли предложение  $A$  теоремой теории целых чисел с отношениями делимости: /

Applying Presburger algorithm, find out whether the sentence  $A$  is theorem of the theory of integers with divisibility predicates:

$T = (\mathbb{Z}; <, D_2, D_3, \dots; +, -, 0, 1)$ :

$A = \exists y \exists x [(8y + 23 < 4x) \& (3x < 6y + 19) \& D_{15}(7x - 11) \& D_{45}(11x - 28) \& D_{75}(19x - 47)]$

#### Задача 4.

Напишите программу для машины Тьюринга, которая перерабатывала бы входное слово  $m$  над алфавитом  $A = \{ 1 \}$  в выходное слово  $r$ , где  $r$  – остаток от деления числа  $m$  на 4 (здесь  $m$  – фиксированное, но заранее не известное натуральное число). Используя методику Флойда, докажите правильность работы написанной программы. Найдите верхние оценки ее пространственной и временной сложности /

Write a program for Turing machine that processes an input word  $m$  under the alphabet  $A = \{ 1 \}$  into the output word  $r$ , where  $r$  is the residue from division of the number  $m$  by 3 (here  $m$  is fixed unknown number). Using Floyd technique, prove the correctness of this program. Find upper bounds for its space complexity and time complexity.

#### Задача 5.

Найдите нормальную форму следующего лямбда терма: /

Find normal form of the following lambda-term:

$(\lambda x. y \ x) (\lambda x. x \ y)$

#### Assessment criteria (assessment tool — Tasks)

Grade	Assessment criteria
pass	Верно решено не менее 60% задач
fail	Решено неправильно или не решено более 40% задач

#### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Sorochan Sergei Vladimirovich. Fundamentals of Graph Theory = Основы теории графов : teaching aid / S. V. Sorochan ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2023. - 59 p. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=853269&idb=0>.
2. Sorochan Sergei Vladimirovich. Functions of the Logic Algebra. Canonical Types of Boolean Formulae = Функции алгебры логики. Канонические виды булевых формул : teaching aid / S. V. Sorochan ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2023. - 41 p. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=853270&idb=0>.
3. Priest, Graham. An introduction to non-classical logic : from if to is. - 2nd ed. ; 4th printing with corrections. - New York : Cambridge univ. press, 2011. - XXXII, 613 p. - (Cambridge introductions to

philosophy). - ISBN 978-0-521-85433-7 : 5917,00., 1 экз.

Дополнительная литература:

1. Rasiowa, Helena. An algebraic approach to non-classical logics. - Warszawa : PWN, 1974. - 403 p. - (Studies in logic and the foundations of mathematics. Vol. 78). - Библиогр., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Sorochan Sergei Vladimirovich. Fundamentals of Graph Theory = Основы теории графов : teaching aid / S. V. Sorochan ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2023. - 59 p. - Текст : электронный.

<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=853269&idb=0>

2. Sorochan Sergei Vladimirovich. Functions of the Logic Algebra. Canonical Types of Boolean Formulae = Функции алгебры логики. Канонические виды булевых формул : teaching aid / S. V. Sorochan ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2023. - 41 p. - Текст : электронный.

<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=853270&idb=0>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 02.03.02 - Fundamental Informatics and Information Technology.

Author(s): Сорочан Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.