

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от  
«30» ноября 2022 г. № 13  
4

## **Рабочая программа дисциплины**

**Функциональный анализ и вариационное исчисление**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

**01.03.03 Механика и математическое моделирование**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

**Математическое моделирование и компьютерный инжиниринг**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к обязательной части.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.23, Функциональный анализ и вариационное исчисление относится к обязательной части ООП направления 01.03.03 Механика и математическое моделирование

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<b>ОПК-1</b>  Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	<b>ОПК-1.1.: Знает</b> основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук	Знать классические постановки задач бесконечномерной оптимизации, а также аналитические методы решения задач бесконечномерной оптимизации на основе необходимых и достаточных условий оптимальности и соответствующих элементов функционального анализа	собеседование
	<b>ОПК-1.2.: Умеет</b> анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук	Уметь самостоятельно и корректно использовать методы формализации практических и естественнонаучных задач в виде задач бесконечномерной оптимизации, допускающих такую формализацию, а также применять для их решения и исследования методы функционального анализа и бесконечномерной оптимизации	задачи
	<b>ОПК-1.3.: Владеет навыками</b> применения фундаментальных разделов механики, базовых знаний естественнонаучного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач	Владеет навыками использования методов формализации прикладных и естественнонаучных задач, возникающих из потребностей научно-исследовательской деятельности, в виде задач бесконечномерной оптимизации, при условии, что они допускают такую формализацию, а также применения для их решения и исследования методов функционального анализа и бесконечномерной оптимизации	задачи

<b>ОПК-2</b> Способен применять методы математического и алгоритмического моделирования, современный математический аппарат в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности	<b>ОПК-2.1.: Знает</b> основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования	Знать основные положения, терминологию и методологию в области функционального анализа и вариационного исчисления	собеседование
	<b>ОПК-2.2.: Умеет</b> осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук	Уметь осуществлять анализ и выбор методов решения задач, допускающих формализацию в виде задач вариационного исчисления	задачи
	<b>ОПК-2.3.: Владеет навыками</b> применения базовых знаний в области математического и алгоритмического моделирования, а также современный математический аппарат при решении задач профессиональной деятельности	Владеть навыками применения базовых знаний в области вариационного исчисления, а также современный математический аппарат функционального анализа при решении задач математического моделирования	задачи

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>3 ЗЕ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
<b>в том числе</b>	
<b>контактная работа:</b>	<b>65</b>
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	32
- текущий контроль (КСР)	1
<b>самостоятельная работа</b>	<b>43</b>
<b>Промежуточная аттестация – зачет</b>	

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе					Самостоятельная работа обучающегося, часы
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				Всего контактных часов	
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	из них		
Шестой семестр							
Тема 1. Измеримые множества. Определение и основные свойства измеримых множеств.	10	2	2		4	6	
Тема 2. Измеримые функции. Определение и основные свойства измеримых функций. Понятие эквивалентности функций и сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Структура измеримых функций. Интеграл Лебега. Теорема Фубини. Понятие абсолютно непрерывной функции.	16	5	5		10	6	
Тема 3. Линейные пространства и операторы. Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства. Линейные ограниченные операторы. Операции над линейными операторами. Понятие сопряженного оператора. Понятие спектра и спектрального радиуса линейного ограниченного оператора. Приложение спектральной теории к решению линейных дифференциальных уравнений. Принцип сжимающих отображений. Билинейные операторы.	16	5	5		10	6	
Тема 4. Нелинейные операторы. Ограниченность и непрерывность нелинейного оператора. Производная по направлению и вариация по Лагранжу. Дифференцируемость по Гато и по Фреше. Квадратичный функционал. Вторая вари-	16	5	5		10	6	

ация и дважды дифференцируемость по Фреше. Необходимые и достаточные условия локального минимума нелинейного функционала.						
Тема 5. Простейшая задача вариационного исчисления и ее обобщения. Условия первого порядка. Простейшая задача: классификация экстремумов, варьирование, необходимые условия первого порядка (стационарность, уравнение Эйлера), конкретные примеры (задачи о брахистохроне и о наименьшей поверхности вращения). Принцип Гамильтона-Остроградского и его применения. Обобщения простейшей задачи: экстремальные задачи на линейных многообразиях в линейных нормированных пространствах, задачи со старшими производными, задачи с вектор-функциями, задачи с функциями нескольких переменных, задачи с подвижными границами, задачи на классе кусочно-гладких функций,	16	5	5		10	6
Тема 6. Условия второго порядка в вариационном исчислении. Условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления: необходимые условия Лежандра и Якоби слабого минимума, необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума, достаточные условия локального минимума.	16	5	5		10	6
Тема 7. Принцип Лагранжа в вариационном исчислении. Вариационные задачи с ограничениями. Изопериметрические задачи. Задачи со связями. Задача Лагранжа. Конкретные примеры: задача Ди-	17	5	5		10	7

доны, задача о цепной линии, задача Чаплыгина о самолете.						
<b>Текущий контроль (КСР)</b>	1				1	
<b>Промежуточная аттестация - зачет</b>	36					
<b>Итого</b>	108	32	32		65	43

Практические занятия (семинарские занятия) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

На проведение практических занятий (семинарских занятий) в форме практической подготовки отводится 32 часа.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- практических навыков в соответствии с профилем ОП: *применения базовых знаний в области вариационного исчисления; использования методов формализации прикладных и естественно-научных задач, применения для их решения и исследования методов функционального анализа и бесконечномерной оптимизации,*
- компетенций – ОПК-1; ОПК-2.

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Функциональный анализ и вариационное исчисление» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий и подготовку к зачету. Самостоятельная работа студентов (выполнение домашних практических заданий, подготовка к коллоквиуму, зачету) обеспечивается доступной студентам основной и дополнительной литературой, а также доступными им интернет-ресурсами (см. ниже раздел)

#### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины).

Для подготовки к по теме 5, связанной с простейшей задачей вариационного исчисления, студентам можно воспользоваться:

1. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).

Указанное пособие содержат теоретический материал с иллюстрирующими примерами и упражнениями для самостоятельного выполнения, а также примеры программ на языке MATLAB и задания для выполнения лабораторных работ.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно

достижения компетенций)	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»

зачтено	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не за- чтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Понятие измеримого множества. Примеры.	ОПК-1, ОПК-2
2. Свойства измеримых множеств.	ОПК-1, ОПК-2
3. Понятие измеримой функции. Понятие эквивалентности измеримых функций.	ОПК-1, ОПК-2
4. Свойства измеримых функций.	ОПК-1, ОПК-2
5. Понятие сходимости по мере и сходимости в смысле п.в.. Свойства сходимости по мере (теорема А.Лебега, теорема Ф.Рисса).	ОПК-1, ОПК-2
6. Структура измеримых функций (теорема Н.Н.Лузина и ее обращение).	ОПК-1, ОПК-2
7. Понятие интеграла Лебега.	ОПК-1, ОПК-2
8. Свойства интеграла Лебега.	ОПК-1, ОПК-2
9. Теорема Фубини.	ОПК-1, ОПК-2
10. Понятие абсолютно непрерывной функции.	ОПК-1, ОПК-2
11. Понятие линейного нормированного пространства. Примеры.	ОПК-1, ОПК-2



12. Понятие банахова пространства. Примеры.	ОПК-1, ОПК-2
13. Понятие линейного ограниченного оператора.	ОПК-1, ОПК-2
14. Операции над линейными операторами.	ОПК-1, ОПК-2
15. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над лебеговым пространством.	ОПК-1, ОПК-2
16. Неравенство Гельдера.	ОПК-1, ОПК-2
17. Понятие спектра и спектрального радиуса линейного ограниченного оператора. Обобщенная лемма Гронуолла.	ОПК-1, ОПК-2
18. Методы вычисления спектрального радиуса линейного ограниченного оператора.	ОПК-1, ОПК-2
19. Применение спектральной теории к доказательству существования и единственности решения линейных дифференциальных уравнений.	ОПК-1, ОПК-2
20. Применение спектральной теории к доказательству единственности решения полулинейных дифференциальных уравнений.	ОПК-1, ОПК-2
21. Принцип сжимающих отображений. Примеры применения.	ОПК-1, ОПК-2
22. Билинейные операторы.	ОПК-1, ОПК-2
23. Ограниченность и непрерывность нелинейного оператора.	ОПК-1, ОПК-2
24. Производная по направлению и вариация по Лагранжу.	ОПК-1, ОПК-2
25. Дифференцируемость по Гато и по Фреше.	ОПК-1, ОПК-2
26. Квадратичный функционал.	ОПК-1, ОПК-2
27. Вторая вариация и дважды дифференцируемость по Фреше.	ОПК-1, ОПК-2
28. Необходимые и достаточные условия локального минимума нелинейного функционала.	ОПК-1, ОПК-2
29. Простейшая задача вариационного исчисления. Классификация экстремумов. Экстремали функционала и экстремали задачи.	ОПК-1, ОПК-2
30. Основные леммы вариационного исчисления.	ОПК-1, ОПК-2
31. Необходимые условия слабого локального экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.	ОПК-1, ОПК-2
32. Задача о брахистохроне.	ОПК-1, ОПК-2
33. Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.	ОПК-1, ОПК-2
34. Задачи вариационного исчисления с вектор-функциями. Система уравнений Эйлера.	ОПК-1, ОПК-2
35. Задачи вариационного исчисления с функциями нескольких перемен-	ОПК-1, ОПК-2

ных. Уравнение Эйлера-Остроградского.	
36. Принцип Гамильтона-Остроградского	ОПК-1, ОПК-2
37. Изопериметрические задачи: постановка, принцип Лагранжа, условия регулярности.	ОПК-1, ОПК-2
38. Задача Дидоны	ОПК-1, ОПК-2
39. Задача Лагранжа.	ОПК-1, ОПК-2
40. Условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления.	ОПК-1, ОПК-2
41. Понятие о вариационных принципах механики. Принцип Гамильтона –Остроградского. Привести один из примеров (второй закон Ньютона; гармонический осциллятор; уравнение колебаний струны).	ОПК-1, ОПК-2

### 5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции

#### Вариант 1.

Доказать, что множество  $X \subset R^2$  измеримо по Лебегу и найти его меру:

$$X = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq y < \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right\}, \text{ где } a > 0 \text{ – фиксированное число.}$$

#### Вариант 2.

Доказать, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R$ , измерима по Лебегу:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(ne^x)}{n^3 \sqrt{n}}$ .

### 5.2.3. Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

#### Задача 1.

Найти сопряженный оператор к оператору:

$$A[z](t) = \int_{t_2}^{t_1} z(t_1, \xi) d\xi : L_p(\Pi) \rightarrow L_p(\Pi), \quad p \in (1, \infty), \quad \Pi = [0; T_1] \times [0; T_2].$$

#### Задача 2.

Вычислить производную Фреше от оператора:  $F[z] = \int_0^T z^3(t) dt : L_3[0; T] \rightarrow R$ .

#### Задача 3.

Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2 + 2xy] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

#### Задача 4.

Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$J[y] = \int_0^1 [(y'')^2 - 48y] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

### Задача 5.

Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$J[y] = \int_0^1 (y')^2 dx \rightarrow \min, \quad K[y] = \int_0^1 y dx = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1968 (14), 1972 (5), 1976 (25), 1981 (55), 1989 (93), 2006 (50), 2009 (10).
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1957 (7), 1965 (2), 1969 (17), 2002 (86).

### б) дополнительная литература:

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: ГИФМЛ. 1961 (18).
2. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. К.: Выща школа, 1990 (1).

### в) учебно-методическая литература, имеющаяся на кафедре прикладной математики для выдачи студентам

1. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).

### г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Фонд электронных изданий ННГУ. Режим доступа:  
<http://www.unn.ru/books/resources.html>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.03 Механика и математическое моделирование

Автор к.ф.-м.н., доц. А.В.Чернов

Заведующий кафедрой М.В. Иванченко

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.