

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Теория меры

---

Уровень высшего образования  
Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы  
Математическое моделирование и искусственный интеллект

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.12.01 Теория меры относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1: Знать базовые понятия курса: измеримое пространство, измеримое множество, функция множества, мера, положительная мера, вероятностная мера, сосредоточенная мера, абсолютно непрерывная мера. Измеримая функция интеграл Лебега</p> <p>ПК-13.2: Знать методы использования теории меры при решении математических и прикладных проблем</p> <p>ПК-13.3: Уметь находить меру множества, вычислять интеграл Лебега. Уметь применять теорию меры при решении научных задач математического моделирования.</p> <p>ПК-13.4: Владеть приемами и навыками, предполагающими использование аппарата меры в решении прикладных задач</p>	Собеседование Задания	Зачёт: Контрольные вопросы

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>2</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>24</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>24</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>23</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	
Тема 1. Введение. Открытые и замкнутые множества на прямой	4	2	2	4	0
Тема 2. Мера открытого множества на прямой	7	2	2	4	3
Тема 3. Внешняя и внутренняя меры. Мера множества на прямой	7	2	2	4	3
Тема 4. Измеримые функции	7	2	2	4	3
Тема 5. Интеграл Лебега	11	4	4	8	3
Тема 6. Функции с ограниченным изменением. Функции скачков, сингулярные и абсолютно непрерывные функции.	11	4	4	8	3
Тема 7. Общий вид меры множества на прямой. Плотность меры	12	4	4	8	4
Тема 8. Общее определение меры.	12	4	4	8	4
Аттестация	0				
КСР	1			1	
<b>Итого</b>	<b>72</b>	<b>24</b>	<b>24</b>	<b>49</b>	<b>23</b>

#### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Введение. Открытые и замкнутые множества на прямой.

История теории меры. Приложения. Точечные множества на прямой. Классификация точек множества. Открытые и замкнутые множества.

Тема 2. Мера открытого множества на прямой.

Свойства открытых и замкнутых множеств. Понятие топологического пространства. Структура открытых и замкнутых множеств на прямой. Мера промежутка. Мера открытого множества.

Аддитивность меры. Мера замкнутого множества.

Тема 3. Внешняя и внутренняя меры. Мера множества на прямой.

Мера Жордана линейных и плоских множеств. Критерий квадрируемости. Внешняя и внутренняя меры линейного множества, свойства. Критерий измеримости. Свойства меры.

Тема 4. Измеримые функции.

Измеримые функции, примеры. Свойства измеримых функций. Последовательности измеримых функций.

Тема 5. Интеграл Лебега.

Интеграл Римана. Суммы Дарбу. Интегральная сумма Лебега. Критерии интегрируемости. Свойства интеграла. Связь интегралов Римана и Лебега.

Тема 6. Функции с ограниченным изменением. Функции скачков, сингулярные и абсолютно непрерывные функции.

Тема 7. Общий вид меры множества на прямой. Плотность меры.

Тема 8. Общее определение меры. Семейства множеств. Мера на полукольцах. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Лебегово продолжение меры.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Теория меры, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=9729>.

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-13:**

Примеры вопросов:

1. Как определяется мера открытого и замкнутого множества на прямой?

2. Что такое борелевские множества? Приведите примеры.

3. Определение интеграла Лебега.

4. Что такое абсолютно непрерывная функция? Приведите примеры.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Примеры заданий:

1. Докажите, что множество точек отрезка  $[0,1]$ , у которых в десятичном разложении отсутствует цифра 7, имеет меру нуль.
2. Может ли равняться нулю мера множества, имеющего хотя бы одну внутреннюю точку?
3. Приведите пример функции, интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману. Найдите для неё верхний и нижний интегралы Дарбу.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов. Продемонстрирован

Оценка	Критерии оценивания
	творческий подход к решению нестандартных задач.
отлично	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме. Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.
очень хорошо	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
хорошо	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами
удовлетворительно	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме. Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продemonстрированы основные умения и базовые навыки. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие минимальных умений. Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие умений и навыков вследствие отказа обучающегося от ответа

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
		не зачтено		зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место	Минимально допустимый уровень знаний.	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, превышающем программу

	оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	грубые ошибки	Допущено много негрубых ошибок	программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	программе подготовки . Допущено несколько несущественных ошибок	программе подготовки и. Ошибок нет.	подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».

	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»
--	--------------	---

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-13

1. Топологическое пространство. Открытые и замкнутые множества на прямой.
2. Структура открытых и замкнутых множеств на прямой.
3. Мера открытых и замкнутых множеств на прямой.
4. Внешняя и внутренняя мера множества на прямой.
5. Измеримые множества на прямой.
6. Измеримые функции. Определение и основные свойства.
7. Последовательности измеримых функций. Сходимость по мере и почти всюду.
8. Интеграл Лебега.
9. Функции ограниченной вариации. Абсолютно непрерывные функции.
10. Общее определение меры. Свойства меры.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», Даны ответы на все вопросы, возможно не в полном объеме или с недочетами.
не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно». Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно». Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно» Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. Даны ответы не на все вопросы или имели место грубые ошибки.

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Кузенков Олег Анатольевич. Уравнения динамики меры : учеб. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки "Приклад. математика и информатика", "Информ. технологии" / ННГУ. - Н. Новгород : [б. и.], 2010 (Тип. ННГУ). - 100 с. - 80.00., 30 экз.
2. Кузенков Олег Анатольевич. Оптимизация динамики меры : учеб. пособие для студентов ННГУ / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2013. - 142 с. - ISBN 978-5-91326-185-4 : 39.06., 37 экз.
3. Натансон Исидор Павлович. Теория функций вещественной переменной : учебник для студентов вузов. - 3-е изд., испр. - СПб. : Лань, 1999. - 560 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0136-1 : 63.00., 1 экз.

Дополнительная литература:

1. Кузенков Олег Анатольевич. Математические модели процессов отбора : учебно-методическое пособие / О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, К. Р. Круподерова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 133 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=851324&idb=0>.
2. Кузенков Олег Анатольевич. Математические модели процессов отбора : учебно-методическое пособие / О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, К. Р. Круподерова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 133 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=851324&idb=0>.
3. Макаров Иринарх Петрович. Дополнительные главы математического анализа : учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. - М. : Просвещение, 1968. - 312 с. : с черт. - 0.67., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Кузенков О.А., Новоженин А.В. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СЧЕТНОМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ// Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2009. №3. С. 145-151. <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=2483>
2. Кузенков О. А., Новоженин А. В. СИСТЕМЫ ОТБОРА НА СЧЕТНОМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ// Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2011. №3. С. 92-98. <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=4376>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Кузенков Олег Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № №6.