

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.
Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
«30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

Комбинаторный анализ

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Прикладная математика и информатика (общий профиль)

Форма обучения
очная

Нижний Новгород

2023 год

1. Место и цели дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.

Код дисциплины Б1.В.ДВ.09.02 «Комбинаторный анализ»

№ вари-анта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.09.02 «Комбинаторный анализ» относится к части ООП направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», формируемой участниками образовательных отношений.

2. Планируемые результаты обучения соотношенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
ПК-13 <i>Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике</i>	ПК-13.1. <i>Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</i>	Знает основные понятия и утверждения дисциплины «Комбинаторный анализ», описание основных комбинаторных объектов; имеет представление о более сложных методах комбинаторики, таких, как обращение Мёбиуса, теория Пойа	Тест
	ПК-13.3. <i>Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</i>	Умеет пользоваться базовыми методами комбинаторики (правила суммы и произведения, метод включения и исключения, раскрытие линейных рекуррентных соотношений)	Задача (практическое задание), контрольная работа
	ПК-13.4. <i>Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</i>	Владеет навыками решения прикладных комбинаторных задач, включая задачи из алгебры (теория групп, многочлены, комплексные числа), математического анализа (разложение функций в степенные ряды, гиперболические функции)	Задача (практическое задание), контрольная работа

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

Общая трудоемкость	2 ЗЕТ
--------------------	-------

Часов по учебному плану	72
в том числе	
контактная работа:	33
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	39
Промежуточная аттестация – зачет	

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего, час.	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы, из них				Самостоятельная работа, час.
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1.Классические комбинаторные объекты	9	2	2		4	5
2.Новые комбинаторные объекты	9	2	2		4	5
3.Функциональное представление комбинаторных объектов	7	1	1		2	5
4.Производящие функции	16	5	5		10	6
5.Метод решета	10	2	2		4	6
6.Комбинаторика частично упорядоченных множеств	10	2	2		4	6
7.Комбинаторика групп	10	2	2		4	6
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация – зачет						
Итого	72	16			33	39

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа является важной частью учебного процесса. Цель самостоятельной работы – формирование способностей и навыков к самообразованию и профессиональному совершенствованию. Она вырабатывает у студента культуру умственного труда, воспитывает целеустремленность, систематичность и последовательность в работе, развивает исследовательские способности.

4.1. Виды самостоятельной работы

- Выполнение домашних практических заданий.
- Чтение справочной, методической и научной литературы.
- Подготовка к выполнению письменных контрольных работ.
- Подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена.

Формой контроля выполнения домашних и контрольных работ является проверка правильности их выполнения. Формой контроля работы с дополнительной литературой являются дополнительные вопросы на зачете.

4.3. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

- 1) Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Изд. 2-е. М.: Наука, 1986. 384 с. (42 экз.)
- 2) Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
- 3) Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
- 4) Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2005. 416 с. (Изд. 1-е: Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977. 368 с.) (150 экз.)
- 5) Сборник задач по дискретной математике. Электронное учебно-методическое пособие. Алексеев В.Е., Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Н.Новгород, ННГУ, 2012. 80 с.
http://www.unn.ru/books/met_files/alekseev.pdf

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Инди- каторы компе- тенции	Оценка сформированности компетенций						
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	отсутствие знаний материала	наличие грубых ошибок в основном материале	знание основного материала с рядом негрубых ошибок	знание основного материала с рядом заметных погрешностей	знание основного материала с незначительными погрешностями	знание основного материала без ошибок и погрешностей	знание основного и дополнительного материала без ошибок
<u>Умения</u>	полное отсутствие умений	недостаточно умений	умение использовать отдельные приемы при наличии существенных ошибок	умение использовать отдельные приемы при наличии незначительных ошибок	умение использовать отдельные приемы	умение использовать приемы	умение использовать приемы и способность принимать решение на этой основе
<u>Навыки</u>	полное отсутствие навыков	отсутствие навыков	наличие минимальных навыков	посредственное владение навыками	достаточное владение навыками	хорошее владение навыками	всестороннее владение навыками

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка	Уровень подготовки
Зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»

	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
Не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Классические комбинаторные объекты. Перестановки (подстановки), подмножества. Биномиальная формула, сумма биномиальных коэффициентов, симметрия и унимодальность. Рекуррентные соотношения для биномиальных коэффициентов.	ПК-13
2. Новые комбинаторные объекты. Перестановки заданного мультимножества.	ПК-13
3. Разбиение чисел. Упорядоченные разбиения на заданное число слагаемых.	ПК-13
4. Разбиение чисел. Упорядоченные разбиения на любое число слагаемых.	ПК-13
5. Разбиение чисел. Неупорядоченные разбиения на заданное число слагаемых.	ПК-13
6. Разбиение чисел. Неупорядоченные разбиения на любое число слагаемых.	ПК-13
7. Разбиение множеств. Неупорядоченные разбиения на заданное число блоков.	ПК-13
8. Разбиение множеств. Неупорядоченные разбиения на любое число блоков.	ПК-13
9. Разбиение множеств. Упорядоченные разбиения.	ПК-13
10. Разбиения подстановок на циклы.	ПК-13
11. Функциональное представление комбинаторных объектов. Типы функций и различимость элементов. Таблица комбинаторных объектов.	ПК-13
12. Производящие функции. Общая теория линейных однородных рекуррентных соотношений.	ПК-13
13. Производящие функции. Системы линейных однородных рекуррентных соотношений.	ПК-13
14. Производящие функции. Неоднородные рекуррентные соотношения.	ПК-13
15. Производящие функции. Примеры линейных рекуррентных соотношений с переменными коэффициентами.	ПК-13
16. Производящие функции. Пример решения нелинейного рекуррентного соотношения	ПК-13

(числа Каталана).	
17. Производящие функции. Подсчет числа специализированных мультимножеств.	ПК-13
18. Производящая функция для разбиений чисел.	ПК-13
19. Экспоненциальные производящие функции. Их использование для нахождения перестановок специализированных мультимножеств.	ПК-13
20. Производящие функции чисел Стирлинга 2-го рода и чисел Белла.	ПК-13
21. Производящие функции чисел Стирлинга 1-го рода.	ПК-13
22. Метод решета. Подсчет числа беспорядков.	ПК-13
23. Метод решета. Подсчет числа булевых функций без фиктивных переменных.	ПК-13
24. Метод решета. Подсчет количества простых чисел из заданного диапазона.	ПК-13
25. Метод решета. Нахождение функции Эйлера (количества чисел, не превосходящих заданного числа и взаимно простых с ним).	ПК-13
26. Метод решета. Его применение к вычислению перманентов.	ПК-13

5.2.2. Типовые контрольные задания для оценки сформированности компетенций

Контрольные работы для оценивания результатов обучения в виде умений и владений (ПК-13)

Типовая контрольная работа содержит несколько заданий и оценивается по семибалльной системе. За каждое правильно выполненное задание без недочетов дается 1 балл, за правильно выполненное задание с недочетом – 0,5 балла. За невыполненное задание или неправильно выполненное задание баллы не начисляются. Полученные баллы суммируются, и определяется % выполнения контрольного задания по формуле $(100s)/n$, где n – общее число заданий и s – сумма набранных баллов. Оценка за контрольное задание определяется следующим образом:

% выполнения	Оценка
100 %	Превосходно
90 – 99 %	Отлично
80 – 89 %	Очень хорошо
70 – 79 %	Хорошо
50 – 69 %	Удовлетворительно
20 – 49 %	Неудовлетворительно
< 20 %	Плохо

Пример контрольной работы по основным и новым комбинаторным объектам

Вариант № 1

1. Сколько существует решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ при заданных n и k , если все x_i равны 0 или 1? (Конкретный пример: $n=1, k=5$).
2. Сколько существует решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ при заданных n и k , если все x_i – целые неотрицательные числа? (Конкретный пример: $n=6, k=5$).
3. Сколько существует решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ при заданных n и k , если все x_i –

натуральные числа? (Конкретный пример: $n=5, k=1$).

4. Сколько существует матриц из m строк, n столбцов с элементами из множества $\{0, 1\}$, у которых все строки различны?

5. Сколько существует упорядоченных разбиений натурального числа k на n натуральных слагаемых? Каково число аналогичных упорядоченных разбиений? (Конкретный пример: $n=4, k=8$).

6. Сколько существует неупорядоченных разбиений множества мощности k на n непустых блоков? (Конкретный пример: $n=5, k=7$).

7. Сколько существует неупорядоченных разбиений множества мощности k на любое число непустых блоков? (Конкретный пример: $k=6$).

8. Вычислите $\binom{\frac{1}{2}}{k}$. (Конкретный пример: $k=5$).

Пример контрольной работы по производящим функциям и рекуррентным соотношениям

Вариант № 1

1. Постройте производящую функцию для мультимножеств в универсе $\{0,1,2\}$, в которых элемент i входит любое число раз $k=i \pmod 3$. Найдите количество таких мультимножеств мощности 0, 3 и 9, выпишите все соответствующие мультимножества.

2. Какая числовая последовательность порождается производящей функцией $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$?

3. Раскройте линейную рекуррентность $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$, если $a_1 = 1, a_2 = 1$.

4. Сколько существует евклидово неизоморфных деревьев с m ребрами? (Конкретные примеры: $m=3, m=5$).

Пример контрольной работы по методу решета

Вариант № 1

1. Сколько различных “слов” можно получить, переставляя буквы слова ТАРАКАН?

2. В группе переводчиков из 13 человек каждый знает хотя бы один из трех языков – английский, немецкий, французский. При этом
английский язык знают 10 переводчиков,
немецкий язык знают 7 переводчиков,
французский язык знают 6 переводчиков,
английский и немецкий знают 5 переводчиков,
английский и французский знают 4 переводчика,
немецкий и французский знают 3 переводчика.

Сколько переводчиков знают все три языка?

Сколько переводчиков знают в точности два языка?

В точности один язык?

3. Сколько существует натуральных чисел $\leq n$, взаимно простых с n ? (Конкретный пример: $n=100$).

4. Сколько делителей существует у натурального числа n ? (Конкретный пример: $n=100$).

5. Какие перестановки называются беспорядками? Сколько существует беспорядков из n элементов? (Конкретный пример: $n=6$).

6. Вычислите перманент матрицы
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Подсчитайте количество булевых функций от четырех переменных, у которых все переменные являются существенными.

5.2.3. Образцы тестовых заданий для оценивания результатов обучения в виде знаний (ПК-13)

Вариант 1

1. Что из перечисленного ниже является синонимом слова СОЧЕТАНИЕ ?
1) подмножество 2) кортеж 3) разбиение 4) независимый цикл
2. Чему равно число размещений из 6 по 3?
1) 10 2) 20 3) 60 4) 120
3. Чему равно число сочетаний с повторениями из 3 по 5?
1) 0 2) 1 3) 10 4) 21
4. Граф имеет n вершин и m ребер. Сколько у него различных остовных подграфов?
1) 2^n 2) 2^m 3) $m + n$ 4) mn
5. Какие корни имеет характеристическое уравнение линейного рекуррентного соотношения $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$?
1) 1 кратности 2 2) 1 и 4 3) 1 и -4 4) -1 и 4
6. Сколько существует нечетных простых чисел, не превосходящих 20?
1) 5 2) 7 3) 8 4) 10
7. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 30 и взаимно простых с 30?
1) 5 2) 7 3) 8 4) 10
8. Сколько делителей существует у числа 64?
1) 5 2) 6 3) 7 4) 8
9. Сколько существует беспорядков из трех элементов?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

5.2.4. Примеры задач, выносимых на зачет

Задача 1. Сколько существует двузначных четных чисел? Сколько из этих чисел с несовпадающими цифрами?

Задача 2. Азбука Морзе состоит из двух символов – точки и тире. Кодовые комбинации включают от 1 до 5 символов. Почему нельзя ограничиться комбинациями с числом символов ≤ 4 ?

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

- 1) Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Изд. 2-е. М.: Наука, 1986. 384 с. (42 экз.)
 - 2) Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
 - 3) Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
- б) дополнительная литература:
- 1) Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
 - 2) Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
 - 3) Райзер Г.Дж. Комбинаторная математика. М.: Мир, 1965 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
 - 4) Холл М. Комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: к.ф.-м.н., доцент кафедры АГиДМ Сорочан С.В.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Зав. кафедрой алгебры, геометрии и дискретной математики: д.ф.-м.н. Золотых Н.Ю.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.