

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики  
(факультет / институт / филиал)

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от  
«30» ноября 2022 г. № 13

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
ФРАКТАЛЫ И ХАОС В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Уровень высшего образования  
**специалитет**

---

Направление подготовки  
**01.05.01 Фундаментальные математика и механика**

---

Направленность образовательной программы  
**Фундаментальная механика и приложения**

---

Форма обучения  
**очная**

---

Нижний Новгород

2023

## 1. Место и цели дисциплины (модуля) в структуре ООП.

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.06.02 «Фракталы и хаос в динамических системах» относится к части ООП специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-11. Умение использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира, сред, тел и конструкций, а также современное экспериментальное оборудование	<p>ПК-11.1. Знает теоретические основы физического и компьютерного моделирования, основы эксперимента в механике.</p> <p>ПК-11.2. Умеет использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира, сред, тел и конструкций, а также современное экспериментальное оборудование для решения задач механики на основе полученных теоретических знаний.</p> <p>ПК-11.3. Имеет практический опыт использования физических и компьютерных моделей и экспериментального оборудования при решении стандартных задач механики</p>	<p><b>Знать</b> теоретические основы физического и компьютерного моделирования, методы исследования фрактальных задач; знания методов построения базовых конструктивных и динамических фракталов</p> <p><b>Уметь</b> использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира методы исследования фрактальных задач;</p> <p><b>Владеть</b> практическим опытом использования базовых знаний из теории фракталов; опыт использования физических и компьютерных моделей применения математически</p>	Собеседование Задача Задача
ПК-12. Владение навыками применения математически сложных алгоритмов в современных специализированных программных комплексах, реализации в них собственных методов, моделей и алгоритмов	<p>ПК-12.1. Знает теоретические основы фундаментальных компьютерных наук.</p> <p>ПК-12.2. Умеет ориентироваться в современных алгоритмах компьютерной математики.</p> <p>ПК-12.3. Имеет практический опыт использования</p>	<p><b>Знать:</b> базовые знания методов исследования фрактальных задач; знания методов построения базовых конструктивных и динамических фракталов</p> <p><b>Уметь</b> использовать базовые знания методов исследования фрактальных задач; ориентироваться в современных алгоритмах компьютерной математики.</p> <p><b>Владеть</b> практическим опытом использования</p>	Собеседование Задача Задача

	математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах, включая реализацию в них собственных методов и моделей	математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах, включая реализацию в них собственных методов и моделей из теории фракталов.	
--	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины «Фракталы и хаос в динамических системах»

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	_3_ ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	16
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	0
- занятия лабораторного типа	1
- текущий контроль (КСР)	
самостоятельная работа	75
Промежуточная аттестация – зачет	зачет

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

Содержание дисциплины «Фракталы и хаос в динамических системах».

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	в том числе				
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				Самостоятельная работа студента часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные	Всего контактных часов	КСР
Конструктивные фракталы: фракталы и системы счисления; самоподобие; фрактальная размерность; фракталы Кантора, Коха, Минковского, Серпинского; общая схема построения конструктивных фракталов; спирали, деревья, звезды; анализ конструктивных	29	14			14	15

фракталов; системы итерированных функций (СИФ); случайность во фракталах.						
Динамические фракталы: модель ограниченного роста популяции; одномерные комплексные эндоморфизмы; множества Жулиа и Фату; фракталы Жулиа для квадратичных отображений и алгоритмы построения. Фрактал Мандельброта, фракталы Ньютона.	31	11			11	18
Фракталы и хаос: определение хаоса по Девани; примеры хаотических отображений; хаотическое поведение на аттракторе СИФ; хаос фракталов Жулиа; странный аттрактор в отображении Эно.	11	7			5	6
В т.ч. текущий контроль	2					
<b>Промежуточная аттестация – зачет</b>						

### **Образовательные технологии**

Используются образовательные технологии в форме лекций.

Лекционные занятия в основном проводятся в форме презентаций **Лекция-информация**. Ориентирована на изложение и объяснение студентам научной информации, подлежащей осмыслению и запоминанию. Приводится много иллюстративного материала – разнообразные фракталы. Практические занятия включают элемент **Лекция-беседа**, или «диалог с аудиторией», - наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Эта лекция предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Преимущество лекции-беседы состоит в том, что она позволяет привлекать внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей обучаемых.

**Лекция-консультация** по типу «**вопросы—ответы**». Лектор отвечает в течение лекционного времени на вопросы студентов по всем разделу или всему курсу. Проводится перед промежуточной аттестацией.

## **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

### **4.1 Виды самостоятельной работы студентов**

- Изучение лекционных материалов, подготовка алгоритма и компьютерной программы построения фрактальных множеств.
- Отладка компьютерной программы.

### **4.2 Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов, практические задания для проведения текущего контроля**

Используются учебные пособия:

А.Д. Морозов «Введение в теорию фракталов».- Изд-во ННГУ, Н.Новгород, 1999 (50 экз.)

Р.М. Кроновер «Фракталы и хаос в динамических системах».-Изд-во Постмаркет, Москва, 2000.(13 экз).

#### **4.3 5.3 Вопросы для контроля:**

##### Вопросы к зачету

##### **Часть 1. Конструктивные фракталы.**

1. Фракталы и системы счисления.
2. Размерность. Эксперимент Ричардсона. Степень изгибания кривой.
3. Фракталы и меандры (Коха, Минковского).
4. Общая схема построения конструктивных фракталов (примеры, фрактал Леви).
5. Анализ конструктивных фракталов (сжатие-поворот, отражение-сжатие).
6. Системы итерированных функций (СИФ) (основные понятия, пример –ковер Серпинского).
7. Теорема (без доказательства) о сходимости отображения Хатчинсона, понятие хаусдорфовой метрики.
8. Детерминированный и рандомизированный алгоритмы построения СИФ.

##### **Часть. 2. Динамические фракталы.**

9. Модель ограниченного роста популяции.
10. Фракталы Жулиа.
11. Алгоритм построения фрактала Жулиа (теорема, на которой основан алгоритм).
12. Фрактал Мандельброта.
13. Алгоритм построения фрактала Мандельброта (теорема, на которой основан алгоритм).
14. Фракталы Ньютона.

##### **Часть 3. Хаос в детерминированных системах.**

15. Хаос по Девани. Примеры хаотического отображения.
16. Хаотичность отображения Жулиа на множестве Жулиа. Пример.:  $f(z)=z^2-2$ .
17. Хаос в отображении Эно.
18. Хаос в системе Лоренца
19. Формула Мельникова.

##### **Типовые задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

1. Построить фрактала Минковского. ПК-11
2. Построить фрактал Леви. ПК-11
3. Используя детерминированную СИФ, построить фрактал Серпинского. ПК-11
4. Используя детерминированную СИФ построить «лист папоротника». ПК-11
5. Построить «ледовый квадрат». ПК-11
6. Построить фрактал Жулиа. ПК-12
7. Построить фрактал Мандельброта. ПК-12
8. Доказать хаотичность «тентового отображения». ПК-12

##### **5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине,**

**5.1 Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования**

**Оценка уровня формирования компетенции ПК-12**

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
<p>ПК-12.1. Знает теоретические основы фундаментальных компьютерных наук.</p> <p>ПК-12.2. Умеет ориентироваться в современных алгоритмах компьютерной математики.</p> <p>ПК-12.3. Имеет практический опыт использования математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах, включая реализацию в них собственных методов и моделей</p>	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач, полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией.	Плохой уровень формирования компетенции. 0-19 баллов - «Плохо»
	Наличие грубых ошибок в основном материале, наличие грубых ошибок при решении стандартных задач, отсутствие навыков, предусмотренных данной компетенцией	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов – «неудовлетворительно»
	<b>Знать</b> основные понятия дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов с рядом негрубых ошибок. <b>Уметь</b> У1 с рядом негрубых ошибок. <b>Владеть</b> опытом нахождения, анализа и использования на практике математических методов теории динамических систем	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	<b>Знать</b> основы строгого доказательства утверждений, формулировки результатов, вывода следствий из полученного результата <b>Уметь</b> У1 строго доказывать утверждения, формулировать результаты, выводиться следствия из полученного результата с незначительными погрешностями. <b>Владеть</b> большинством основных навыков, демонстрируя их в стандартных ситуациях	Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»
	<b>Знать</b> основы строгого доказательства утверждений, формулировки результатов, вывода следствий из полученного результата с незначительными погрешностями. <b>Уметь</b> У1 без ошибок и погрешностей. <b>Владеть</b> всеми основными навыками, демонстрируя их в стандартных ситуациях	Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»

	<b>Знать</b> основные определения и утверждения, предусмотренные компетенцией без ошибок и погрешностей. <b>Уметь</b> У1. <b>Владеть</b> всеми навыками, демонстрируя их в стандартных ситуациях.	Отличный уровень формирования компетенции 90-99 баллов «Отлично»
	<b>Знать</b> основной и дополнительный материал без ошибок и погрешностей <b>Уметь</b> У1. Свободно. <b>владеть</b> всеми навыками, демонстрируя их в стандартных и нестандартных ситуациях.	Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

### Оценка уровня формирования компетенции ПК-11

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)			Шкала оценивания
<p>ПК-11.1. Знает теоретические основы физического и компьютерного моделирования, основы эксперимента в механике.</p> <p>ПК-11.2. Умеет использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира, сред, тел и конструкций, а также современное экспериментальное оборудование для решения задач механики на основе полученных теоретических знаний.</p> <p>ПК-11.3. Имеет практический опыт использования физических и компьютерных моделей и экспериментально о оборудования при решении стандартных задач механики</p>	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач, полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией.			Плохой уровень формирования компетенции.  0-19 баллов - «Плохо»
	Наличие грубых ошибок в основном материале, наличие грубых ошибок при решении стандартных задач, отсутствие навыков, предусмотренных данной компетенцией			Неудовлетворительный уровень формирования компетенции.  20-49 баллов – «неудовлетворительно»
	<b>Знать</b> основные понятия и свойства теории фракталов с рядом негрубых ошибок. <b>Уметь</b> анализировать задачи теории фракталов с рядом негрубых ошибок. <b>Владеть</b> опытом нахождения, анализа и использования на практике математических методов теории фракталов			Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	<b>Знать</b> основы строгого доказательства утверждений, формулировки результатов, вывода следствий из полученного результата <b>Уметь</b> У1 строго доказывать утверждения, формулировать			Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»

	результаты, выводить следствия из полученного результата с незначительными погрешностями. <b>Владеть</b> большинством основных навыков, демонстрируя их в стандартных ситуациях			
	<b>Знать</b> основы строгого доказательства утверждений, формулировки результатов, вывода следствий из полученного результата с незначительными погрешностями. <b>Уметь</b> У1 без ошибок и погрешностей. <b>Владеть</b> всеми основными навыками, демонстрируя их в стандартных ситуациях			Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»
	<b>Знать</b> основные определения и утверждения, предусмотренные компетенцией без ошибок и погрешностей. <b>Уметь</b> У1. <b>Владеть</b> всеми навыками, демонстрируя их в стандартных ситуациях.			Отличный уровень формирования компетенции 90-99 баллов «Отлично»
	<b>Знать</b> основной и дополнительный материал без ошибок и погрешностей <b>Уметь</b> У1. Свободно. <b>владеть</b> всеми навыками, демонстрируя их в стандартных и нестандартных ситуациях.			Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

## 5.2. Описание шкал оценивания

Для оценивания результатов учебной деятельности студентов при изучении дисциплины **“Фракталы и хаос в динамических системах”** используется балльная система оценки учебной работы студентов. Итоговая оценка студента складывается из оценок: баллы за выполнение домашних практических работ-написание компьютерных программ построения фракталов, баллы за выполнение контрольной работы, балл за ответ на вопросы на зачете.

По результатам итоговой аттестации проставляются оценки «Зачтено» (соответствует уровням оценки компетенций «удовлетворительно» и выше) и «Не зачтено» (соответствует уровням оценки компетенций «плохо» и «неудовлетворительно»).



***Соответствие между баллами и качественной оценкой***

Активности	Баллы	Качественная оценка
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Контрольная работа ср. балл 98-100 %,</li> <li>● Выполнение домашних работ (100%)</li> <li>● ответ на вопросы</li> </ul>	98-100	Превосходно
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Контрольная работа ср. балл 91-98 %,</li> <li>● Выполнение домашних работ (100%)</li> <li>● ответ на вопросы</li> </ul>	91-98	Отлично
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Контрольная работа ср. балл 80-89%,</li> <li>● Выполнение домашних работ (100%)</li> <li>● ответ вопросы</li> </ul>	80 – 90	Очень хорошо
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Контрольная работа ср. балл 60-79%,</li> <li>● Выполнение домашних работ (100%)</li> <li>● ответ на вопросы</li> </ul>	60-79	Хорошо
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Контрольная работа балл 50 – 59%,</li> <li>● Выполнение домашних работ (100%)</li> <li>● ответ вопросы</li> </ul>	50 – 59	Удовлетворительно
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Контрольная работа балл 20-49%,</li> <li>● Выполнение домашних работ (60%)</li> <li>● ответ вопросы</li> </ul>	20-49	Неудовлетворительно
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Контрольная работа балл ниже 49%,</li> <li>● Выполнение домашних работ (50%)</li> <li>● ответ вопросы</li> </ul>	0-19	Плохо

Превосходно	Свободное владение методами, входящими в материал курса
Отлично	Подготовка, уровень которой существенно выше среднего, с очень незначительными погрешностями
Очень хорошо	В целом хорошая подготовка с рядом заметных ошибок
Хорошо	Хорошая подготовка (знание основных методов и понимание взаимосвязи между ними, умение их применять), но со значительными ошибками
Удовлетворительно	Подготовка, удовлетворяющая минимальным требованиям (знание основных методов, умение применять их в стандартных ситуациях)

Неудовлетворительно	Необходима дополнительная подготовка для успешного прохождения экзамена
Плохо	Подготовка совершенно недостаточная

### 5.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка от удовлетворительно до превосходно соответствует «зачету», а неудовлетворительно и плохо «незачету».

*Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:*

- индивидуальное собеседование,
- презентация на компьютере результатов построения фрактальных множеств.

*Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:*

- практические контрольные задания

### 5.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

Формулировка заданий для контрольных работ

1. Построить с помощью компьютера конструктивные фракталы: Коха, Минковского Леви.
2. Построить с помощью компьютера конструктивные фракталы: «остров фьордов», «резанный квадрат», «ледовый квадрат».
3. Используя систему итерированных функций (СИФ) и детерминированный алгоритм построить ковер Серпинского и «папортник».
4. Используя систему итерированных функций (СИФ) и рандомизированный алгоритм построить ковер Серпинского и «папортник».
5. Для заданных параметров построить заполненное множество Жулиа.
6. Построить фрактал Мандельброта.

#### Вопросы к зачету

Часть 1. Конструктивные фракталы.

1. Фракталы и системы счисления.
2. Размерность. Эксперимент Ричардсона. Степень изгиба кривой.
3. Фракталы и меандры (Коха, Минковского).
3. Общая схема построения конструктивных фракталов (примеры, фрактал Леви).
4. Анализ конструктивных фракталов (сжатие-поворот, отражение-сжатие).
5. Системы итерированных функций (СИФ) (основные понятия, пример – ковер Серпинского).
6. Теоремы (без доказательства) о сходимости отображения Хатчинсона для СИФ.

7. Детерминированный и рандомизированный алгоритмы построения СИФ. Част. 2. Динамические фракталы.
8. Модель ограниченного роста популяции.
9. Фракталы Жулиа.
10. Алгоритм построения фрактала Жулиа (теорема, на которой основан алгоритм).
11. Фрактал Мандельброта.
12. Алгоритм построения фрактала Мандельброта (теорема, на которой основан алгоритм).
13. Фракталы Ньютона.
14. Хаос по Девани. Примеры хаотического отображения.
15. Хаотичность отображения Жулиа на множестве Жулиа. Пример:  $f(z)=z^2-2$ .
16. Странный аттрактор в отображении Эно.
17. Странный аттрактор в системе Лоренца.
18. Формула Мельникова
19. Определения линии.

### **5.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.**

Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ от 13.02.2014.

[http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest\\_stud%202014.pdf](http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest_stud%202014.pdf)

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

### **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

а) основная литература:

1. А.Д. Морозов «Введение в теорию фракталов».- Изд-во ННГУ, Н.Новгород, 1999 (50 экз.).
2. Р.М. Кроновер «Фракталы и хаос в динамических системах».-Изд-во Постмаркет, Москва, 2000 (13 экз. в библиотеке ННГУ).

б) дополнительная литература:

1. А.Д. Морозов «Фракталы и хаос в динамических системах».-Электронное учебное пособие (презентации лекций): А.Д. Морозов «Фракталы и хаос в динамических системах».-Электронное учебное пособие (презентации лекций):  
<http://www.unn.ru/pages/e-library/>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

- 1) Программа WInSet (Драгунов Т.Н., Морозов А.Д. Использование программы WInSet для визуализации динамических систем: Учебное пособие.-Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.- 102 с., <http://www.unn.ru/pages/e-library/aids/2007/41.pdf>

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины «Фракталы и хаос в динамических системах»:**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий лекционного и семинарского типа, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01  
Фундаментальные математика и механика.

Автор профессор А.Д. Морозов

Заведующий кафедрой

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.