

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.  
Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**Эргодическая теория**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

**Магистратура**

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

**01.04.01 Математика**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

**Фундаментальная математика и приложения**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)

**магистр**

(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения

**очная**

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023

## 1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина **Б1.О.15** «Эргодическая теория» относится к вариативной части блока 1 «Дисциплины (модули)» ОПОП магистратуры по направлению 01.04.01 - Математика, является дисциплиной по выбору, изучается в 1 семестре на 1 году обучения. Трудоемкость составляет 2 зачетных единицы.

При освоении данного специального курса магистранту необходимы базовые знания по математическому анализу, топологии, высшей алгебре.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<b>УК-1</b>  <i>Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий</i>	<b>УК-1.1.</b> Знать принципы системного подхода, позволяющие осуществлять анализ проблемных ситуаций.	<b>ЗНАТЬ</b> основные определения и формулировки теорем эргодической теории в различных фазовых пространствах .	<i>зачет</i>
	<b>УК-1.2.</b> Уметь вырабатывать стратегию действий основываясь на критическом анализе проблемных ситуаций.	<b>УМЕТЬ</b> применять полученные знания при исследовании конкретных динамических систем.	<i>зачет</i>
	<b>УК-1.3.</b> Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций.	<b>ВЛАДЕТЬ</b> методами моделирования систем со сложной динамикой и соответствующих инвариантов энтропийного типа	<i>зачет</i>

<b>ОПК-2</b>  <i>Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении</i>	<b>ОПК-2.1.</b> Знать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.	<b>ЗНАТЬ</b> <i>основные термины, определения и формулировки теорем эргодической теории.</i>	<i>зачет</i>
	<b>ОПК-2.2.</b> Уметь модифицировать, анализировать и реализовывать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.	<b>УМЕТЬ</b> <i>применять полученные знания при построении инвариантных мер (плотностей вероятности) в динамических системах со сложным поведением траекторий.</i>	<i>зачет</i>
	<b>ОПК-2.3.</b> Владеть навыками модификации, анализа и реализации новых математических моделей в современном естествознании, технике, экономике и управлении.	<b>ВЛАДЕТЬ</b> <i>методами конструирования математических моделей рассматриваемых прикладных задач и делать заключение о характере (регулярности или хаотичности) реального процесса</i>	<i>зачет</i>

### 3. Структура и содержание дисциплины «Эргодическая теория»

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>3 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная</b>	

<b>работа):</b> <b>- занятия лекционного типа</b> <b>- занятия семинарского типа</b> <b>-КСРИФ</b>	<b>32</b> <b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>75</b>
<b>Промежуточная аттестация –</b>	<b>Зачет 3 сем.</b>

## Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,  форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	в том числе					
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них					Самостоятельная работа студента часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные работы	Консультации индивидуальные	Все го контактных часов	СРС
Введение.	12	2	2			4	7
Символическая динамика	22	2	2			7	8
Энтропийная теория дискретных динамических систем	22	4	4			7	8
Классические теоремы эргодической теории.	26	4	4			7	8
Эргодическая теория одномерных отображений	25	4	4			7	8
В т. ч. текущий контроль	1					1	
Промежуточная аттестация: зачет							
ИТОГО:		16	16			33	39

## Содержание дисциплины Эргодическая теория

### I. Введение .

1. Исторический обзор эргодической теории. Динамическая система как действие группы на фазовом пространстве. Потoki и каскады, динамические системы с более общей группой преобразований.
2. Измеримое пространство и сохраняющие меру преобразования на нем. Примеры динамических систем в эргодической теории.

### II. Символическая динамика .

1. Схема применения символической динамики в конкретных динамических системах. Пространство символических последовательностей и его свойства. Отображение сдвига на пространстве односторонних и двусторонних символических последовательностей (сдвиги Бернулли).
2. Топологические марковские цепи и их свойства. Разложимые и неразложимые

- топологические марковские цепи, периодические и ациклические цепи. Примеры.
3. Теорема Перрона-Фробениуса.
  4. Применение теоремы Перрона-Фробениуса для подсчета асимптотики периодических точек. Динамическая дзета-функция Артина-Мазура.

### **III. Энтропийная теория дискретных динамических систем**

1. Определение топологической энтропии непрерывного отображения компакта при помощи открытых покрытий (по Адлеру-Конхейму-МакЭндрю). Основные свойства топологической энтропии.
2. Топологическая энтропия как инвариант топологической сопряженности. Образующие покрытия и их применение для вычисления топологической энтропии.
3. Примеры вычисления топологической энтропии для топологических Марковских цепей и одномерных отображений.
4. Определение топологической энтропии при помощи разделенных и стягивающих подмножеств (по Боуэну). Эквивалентность различных определений.
5. Метрическая энтропия и её свойства. Вариационный принцип. Мера с максимальной энтропией.

### **IV. Классические теоремы эргодической теории**

1. Теорема Пуанкаре о возвращении и её обобщения.
2. Теорема Крылова-Боголюбова о существовании и построении инвариантной меры. Строго эргодические динамические системы.
3. Эргодические меры и преобразования. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина и её приложения.
4. Свойства сильного и слабого перемешивания. Примеры.

### **V. Эргодическая теория для одномерных необратимых отображений**

1. Кусочно-монотонные отображения: символическая динамика и существование инвариантных мер.
2. Инвариантные меры, абсолютно непрерывные по отношению к мере Лебега.
3. Кусочно-монотонные отображения постоянного наклона.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся осуществляется в виде работы с рекомендованной обязательной и дополнительной литературой, изучении литературы, доклады на семинарах, перевод статей на английском языке по теме спецкурса, выступление на семинаре с ответами на вопросы преподавателя и студентов.

Широко используются научные материалы, размещенные в сети Интернет.

Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

Материалы курса лекций «Эргодическая теория» <http://www.unn.ru/e-learning/>

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

## 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и	Продemonстрированы творческий подход к решению нестандартных задач

	обучающего от ответа	ошибки.	недочетами	недочетами	недочетов	недочетов	
--	-------------------------	---------	------------	------------	-----------	-----------	--

## 5.2. Шкала оценки при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов учебной деятельности студентов при изучении дисциплины «Математический анализ» используется балльная система оценки учебной работы студентов. Итоговая оценка студента складывается из оценок: за выполнение домашних практических работ, балл за ответ на вопросы на зачете. По результатам промежуточной аттестации в виде зачета проставляются оценки «Зачтено» (соответствует уровням оценки компетенций «удовлетворительно» и выше) и «Не зачтено» (соответствует уровням оценки компетенций «плохо» и «неудовлетворительно»).

*Соответствие между баллами и качественной оценкой*

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Вопрос	Код компетенции (согласно РПД)
1. Что такое динамическая система с топологической точки зрения? Что такое каскады и потоки?	УК-1, ОПК-2



2. Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем?	УК-1, ОПК-2
3. Почему топологически сопряженные системы имеют одинаковые периоды периодических точек?	УК-1, ОПК-2
4. Дайте определения следующих инвариантных множеств динамической системы: омега-предельное множество, множество рекуррентных множеств, неблуждающее множество. Какие из этих множеств являются частью других?	УК-1, ОПК-2
5. Транзитивные системы в топологической динамике: дайте различные определения. Что такое топологическое перемешивание? Приведите примеры транзитивных и перемешивающих систем.	УК-1, ОПК-2
6. Что такое чувствительная зависимость от начальных условий? Приведите примеры сенситивных систем.	УК-1, ОПК-2
7. Неравенство Динабурга для топологической и метрической энтропии.	УК-1, ОПК-2
8. Определение хаоса по Девани.	УК-1, ОПК-2
9. Определение хаоса по Ли-Йорке. Приведите примеры хаотических по Ли-Йорке систем.	УК-1, ОПК-2
10. Динамические свойства поворота окружности?	УК-1, ОПК-2
11. Минимальные системы: определение и примеры минимальных каскадов на окружности. Какие из поворотов окружности являются минимальными?	УК-1, ОПК-2
12. Сдвиги на многомерном торе: необходимые и достаточные условия транзитивности.	УК-1, ОПК-2
13. Потоки на многомерном торе с постоянным векторным полем: необходимые и достаточные условия транзитивности.	УК-1, ОПК-2
14. Алгебраические аносовские автоморфизмы: плотность периодических точек.	УК-1, ОПК-2
15. Алгебраические аносовские автоморфизмы: транзитивность и топологическое перемешивание.	УК-1, ОПК-2
16. Алгебраические аносовские автоморфизмы: гиперболичность.	УК-1, ОПК-2
17. Нелинейные гомеоморфизмы окружности: определение числа	УК-1, ОПК-2

вращения.	
18. Нелинейные гомеоморфизмы окружности: связь между гладкими и топологическими свойствами (теоремы Данжуа).	<i>УК-1, ОПК-2</i>
19. Потоки на торе без состояний равновесия.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
20. Условия гиперболичности и подковы Смейла.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
21. Символическая динамика: общий подход.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
22. Топологическая схема Бернулли: динамические свойства и хаотичность.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
23. Топологические марковские цепи (ТМЦ) и их классификация. Связь между свойствами матрицы переходов и динамическими свойствами ТМЦ.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
24. Теорема Перрона-Фробениуса и её применение к ТМЦ.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
25. Асимптотика числа периодических точек ТМЦ в терминах спектра матрицы переходов.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
26. Динамическая дзета-функция и её формула для ТМЦ.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
27. Топологическая энтропия: определение через открытые покрытия.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
28. Свойства топологической энтропии.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
29. Вычисление топологической энтропии с помощью образующих покрытий	<i>УК-1, ОПК-2</i>
30. Примеры вычисления топологической энтропии для ТМЦ	<i>УК-1, ОПК-2</i>
31. Определение топологической энтропии по Боуэну в терминах разделенных множеств и сетей	<i>УК-1, ОПК-2</i>
32. Эквивалентность различных определений топологической энтропии.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
33. Формулы для вычисления топологической энтропии кусочно-монотонных отображений отрезка.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
34. Отображения отрезка с положительной энтропией: наличие подков.	<i>УК-1, ОПК-2</i>
35. Что такое динамическая система в эргодической теории:	<i>УК-1, ОПК-2</i>

преобразования. Сохраняющие меру.	
36. Примеры динамических систем с инвариантной мерой.	УК-1, ОПК-2
37. Построение инвариантной меры с помощью итераций: теорема Крылова-Боголюбова.	УК-1, ОПК-2
38. Теорема Пуанкаре о возвращении.	УК-1, ОПК-2
39. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина и её приложения.	УК-1, ОПК-2
40. Эргодичность: эквивалентные определения и примеры.	УК-1, ОПК-2
41. Строгая эргодичность. Примеры для гомеоморфизмов тора.	УК-1, ОПК-2
42. Метрическая энтропия: определения и примеры.	УК-1, ОПК-2
43. Свойства метрической энтропии	УК-1, ОПК-2

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Каток А. Б., Хасселблат Б. - Введение в теорию динамических систем: с обзором последних достижений : пер. с англ. - М.: Изд-во МЦНМО, 2005. - 464 с. (3 экз.)

б) дополнительная литература:

1. Биллингслей П. - Эргодическая теория информации. - М.: Мир, 1969. - 238 с. (3 экз.)

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика.

Автор     М.И. Малкин

Рецензент (ы)

Зав кафедрой, д.ф.-м.н., проф. А.В.Калинин

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.