

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

---

Институт информационных технологий, математики и механики  
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
протокол от  
«14» декабря 2021 г. № 4

**Рабочая программа дисциплины**

---

**Функциональный анализ**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

---

**бакалавриат**

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

---

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

---

**Прикладная математика и информатика (общий профиль)**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

---

**очная**

(очная / очно-заочная / заочная)

**Нижний Новгород**

**2022 год**

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части.

Код дисциплины **Б1.О.22.**

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина <b>Б1.О.22. «Функциональный анализ»</b> относится к обязательной части ООП направления подготовки <i>01.03.02 Прикладная математика и информатика</i> .

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<b>ОПК-6</b> Способен к ведению инновационно-исследовательской деятельности:	<b>ОПК-6.1.</b> Знает особенности ведения инновационной деятельности	<b>Знать</b> понятия и утверждения дисциплины «Функциональный анализ»: <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Нулевая мера. Условие «почти всюду».</li> <li>2. Определение интеграла Лебега, его свойства. Пространство <math>L</math></li> <li>3. Понятия двойного и повторного интегралов Лебега. Теорема Фубини.</li> <li>4. Измеримые множества и функции.</li> <li>5. Определение МП и метрической группы, свойства расстояния.</li> <li>6. Предел. Смысл предела в некоторых конкретных МП.</li> <li>7. Плотные множества. Примеры всюду плотных множеств функций.</li> <li>8. Сепарабельное МП. Сепарабельность подмножества.</li> <li>9. Сходящиеся в себе последовательности. Полное МП.</li> <li>10. Непрерывные операции. Линии-непрерывные операции.</li> <li>11. Принцип сжимающих отображений в полном МП.</li> <li>12. Линейное пространство. Линейно независимые системы.</li> <li>13. Предел в ЛМП. Непрерывность нормы и арифметических действий.</li> <li>14. Полная система элементов.</li> </ol>	Вопросы для собеседования, тестовые вопросы

	<p>Примеры полных систем функций.</p> <p>15. Линейный ограниченный оператор.</p> <p>16. Норма оператора, формулы для нормы. Примеры оценки нормы.</p> <p>17. Принцип сжимающих отображений для линейного уравнения в <math>B</math>-пространстве.</p> <p>18. Оценки норм композиции и итерации.</p> <p>19. Ряд линейных ограниченных операторов. Ряд итераций.</p> <p>20. Условия существования и ограниченности обратного оператора.</p> <p>21. Критерий линейной независимости системы элементов.</p> <p>22. Гильбертово пространство (<math>H</math>-пространство).</p> <p>23. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых элементов.</p> <p>24. Теорема о разложении элемента в ряд Фурье в сепарабельном <math>H</math>-пространстве.</p> <p>25. Ортогональное дополнение.</p> <p>26. Собственные векторы и числа (значения) самосопряженного оператора.</p> <p>27. Собственное подпространство самосопряженного компактного оператора.</p> <p>28. Производные по Фреше и Гато. Свойства сильной производной.</p>	
<p><b>ОПК-6.2.</b> Умеет ставить и решать задачи исследования на ближайшую и отдаленную перспективу с учетом прикладной значимости своей научно-исследовательской работы</p>	<p><b>Уметь</b> Использовать на практике знания, полученные при изучении дисциплины «Функциональный анализ»:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определять обладает ли рассматриваемая характеристика пары элементов пространства свойствами метрики.</li> <li>2. Проверять применимость и применять к приближенному решению принцип сжимающих отображений.</li> <li>3. Проверять ортогональность заданной системы элементов и, в случае ее полноты, раскладывать по данной системе элемент в ряд Фурье.</li> <li>4. Решать линейные интегральные уравнения.</li> </ol>	<p>Вопросы для собеседования, тестовые вопросы</p>
<p><b>ОПК-6.3.</b> Имеет навыки ведения инновационно-исследовательской деятельности</p>	<p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности;</li> <li>- Навыками применения методов приближенного решения операторных и</li> </ul>	<p>Вопросы для собеседования, тестовые вопросы</p>

		интегральных уравнений.	
--	--	-------------------------	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	66
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	32
- занятия лабораторного типа	
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	42
Промежуточная аттестация – экзамен	36

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1 <b>Введение.</b> Предмет дисциплины. Обзор основных разделов курса. Некоторые вопросы истории предмета и примеры.	11	2	2		4	7
Тема 2 <b>Интеграл Лебега и Лебеговы пространства</b> Пространства $L_p$ , виды пределов в пространствах $L_p$ и непрерывность интеграла. Ограниченные измеримые функции. Существенная верхняя грань функции.	19	6	6		12	7
Тема 3 <b>Метрическое пространство (МП) и непрерывные операции</b> Определение МП и метрической группы, свойства расстояния. Примеры конечно- и счетномерных, функциональных пространств. Предел. Сепарабельное МП Принцип сжимающих отображений в полном МП.	19	6	6		12	7
Тема 4 <b>Линейное нормированное пространство (ЛНП) и линейные ограниченные операторы</b> Предел в ЛНП. Полная система элементов. Банахово пространство (В-пространство). Норма оператора,	19	6	6		12	7

формулы для нормы. Примеры оценки нормы. Принцип сжимающих отображений для линейного уравнения в В-пространстве. Условия существования и ограниченности обратного оператора.						
Тема 5 <b>Гильбертово пространство и самосопряженные операторы</b> Гильбертово пространство (H-пространство). Теорема о разложении элемента в ряд Фурье в сепарабельном H-пространстве. Свойства ряда Фурье. Общий вид линейного ограниченного оператора в сепарабельных H-пространствах. Теорема Гильберта-Шмидта о представлении самосопряженного компактного оператора. Альтернатива Фредгольма.	19	6	6		12	7
Тема 6 <b>Сильное дифференцирование</b> Производные по Фреше и Гато. Свойства сильной производной.	19	6	6		12	7
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Промежуточная аттестация- Экзамен	36					
<b>Итого</b>	<b>144</b>	<b>32</b>	<b>32</b>		<b>66</b>	<b>42</b>

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен)

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Функциональный анализ» включает подготовку к экзамену.

Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам, указанным в списке литературы, подготовке ответов на вопросы самоконтроля. Самостоятельная работа может происходить как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс (Функциональный анализ, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=788>), созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

**5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:**

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				

компетенции)							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
	Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа						
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»

	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1 Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Интеграл Лебега и Лебеговы пространства Нулевая мера. Условие «почти всюду». Определение интеграла Лебега, его свойства. Пространства, виды пределов в пространствах и непрерывность интеграла. Сходимость в среднем порядка Полнота пространств. Пространство Понятия двойного и повторного интегралов Лебега. Теорема Фубини. Измеримые множества и функции. Ограниченные измеримые функции. Существенная верхняя грань функции.	ОПК-6
2. Метрическое пространство (МП) и непрерывные операции Определение МП и метрической группы, свойства расстояния. Примеры конечно- и счетномерных, функциональных пространств. Шары. Окрестность точки, внутренние точки. Ограниченные, открытые множества. Предел. Свойства предела в МП. Непрерывность расстояния. Смысл предела в некоторых конкретных МП. Точки прикосновения, замкнутое множество. Соотношение между открытыми и замкнутыми множествами (1 критерий замкнутости множества). Замыкание и его замкнутость. 2 критерий замкнутости множества. Плотные множества. Примеры всюду плотных множеств функций. Сепарабельное МП. Сепарабельность подмножества. Сходящиеся в себе последовательности. Полное МП. Предкомпактное множество, его свойства. Критерий Хаусдорфа предкомпактности. Компакт. Непрерывные операции. Липшиц-непрерывные операции. Принцип сжимающих отображений в полном МП.	ОПК-6
3. Линейное нормированное пространство (ЛНП) и линейные ограниченные операторы Линейное пространство (ЛП). Линейные комбинации, линейная оболочка. Линейно независимые системы. Линейное подпространство. Линейный оператор. ЛП линейных операторов. Композиция. Итерация. Обратный оператор и его линейность. Определение ЛНП. ЛНП как частный случай метрической группы. Свойства нормы. Замкнутое линейное подпространство. Предел в ЛНП. Непрерывность нормы и арифметических действий. Полная система элементов. Примеры полных систем функций. Банахово пространство (В-пространство). Ряд элементов В-пространства, достаточный признак сходимости. Критерии Арцела и Рисса предкомпактности семейств функций в пространствах и Линейный ограниченный оператор. Эквивалентность условий ограниченности и непрерывности для линейного оператора. Норма оператора, формулы для нормы. Примеры оценки нормы. Принцип сжимающих отображений для линейного уравнения в В-пространстве. ЛНП линейных ограниченных операторов. Оценки норм композиции и итерации. Сильный (равномерный) и слабый (поточечный) пределы последовательности линейных ограниченных операторов. В-пространство операторов. Ряд линейных ограниченных операторов. Ряд итераций. Положительно определенные операторы в ЛНП. Условия существования и ограниченности обратного оператора. Компактный оператор и его ограниченность. Сильный предел последовательности компактных операторов. Компактность линейного интегрального оператора в случае, когда ядро – функция, интегрируемая с квадратом.	ОПК-6
4. Гильбертово пространство и самосопряженные операторы	ОПК-6

<p>Определение унитарного (предгильбертова) пространства. Определитель Грама. Критерий линейной независимости системы элементов. Неравенство Коши-Буняковского. Унитарное пространство как частный случай ЛНП. Непрерывность скалярного произведения. Гильбертово пространство (H-пространство). Ортогональность. Равенство Пифагора. Система элементов, замкнутая относительно ортогональности. Замкнутость относительно ортогональности полной системы элементов. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых элементов. Ортогонализация. Базис H-пространства. Существование конечного или счетного базиса в сепарабельном H-пространстве. Теорема о разложении элемента в ряд Фурье в сепарабельном H-пространстве. Свойства ряда Фурье. Общий вид линейного ограниченного оператора в сепарабельных H-пространствах. Самосопряженный оператор и его границы. Положительно определенные операторы в H-пространстве. Положительная определенность в H- и B-пространствах. Ортогональное дополнение. Лемма о разложении элемента сепарабельного H-пространства в ортогональную сумму двух элементов. Собственные векторы и числа (значения) самосопряженного оператора. Собственное подпространство самосопряженного компактного оператора. Максимальный элемент. Теорема Гильберта-Шмидта о представлении самосопряженного компактного оператора. Альтернатива Фредгольма.</p>	
<p>5. Сильное дифференцирование Производные по Фреше и Гато. Свойства сильной производной.</p>	ОПК-6

### 5.2.2. Типовые задания для текущего контроля успеваемости для оценки сформированности компетенции ОПК-6

#### Тестовые вопросы для оценки компетенции «ОПК-6»

##### Вопрос 1

Укажите примеры счетных множеств

- 1) Множество целых чисел (+)
- 2) Множество рациональных чисел (+)
- 3) Множество действительных чисел
- 4) Множество простых чисел (+)
- 5) Множество всех алгебраических полиномов с целыми коэффициентами (+)
- 6) Множество всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами (+)
- 7) Множество непрерывных функций

##### Вопрос 2

Что такое покрытие множества M точек числовой прямой?

- 1) Система интервалов, объединение которых содержит в себе множество M (+)
- 2) Система интервалов, объединение которых содержится в множестве M
- 3) Система интервалов, каждый из которых содержит в себе множество M
- 4) Система интервалов, каждый из которых содержится в множестве M

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### а) Основная литература

1. Треногин В.А. Функциональный анализ. // М.: Физматлит, 2002, с. 488. (42 экз.)
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. / М.: Физматлит, 2006, – 572 с. (232 экз.)
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: учебное пособие. – М. Высшая школа, 1982. – 271 с. (86 экз.)

#### б) дополнительная литература:



1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М. Наука, 1965. – 52с. (27 экз.)
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. // М. Наука, 1982. – 752 с. (26 экз.)

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: к.ф.-м.н., доцент кафедры ДУМиЧА Кротов Н.В.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Заведующий кафедрой ДУМиЧА: д.ф.-м.н. Калинин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 1 декабря 2021 года, протокол № 2.