Приложение 4

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Математический анализ

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.01 - Математика

Направленность образовательной программы
Математика (общий профиль)

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.07 Математический анализ относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции**		**Наименование оценочного средства**	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	**Результаты обучения по дисциплине**	**Для текущего контроля успеваемости**	**Для промежуточной аттестации**
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	*УК-1.1: Знает методы поиска, критического анализа и синтеза информации, основы системного подхода для решения поставленных задач* *УК-1.2: Умеет осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач* *УК-1.3: Владеет основами критического анализа и синтеза информации, системного подхода для решения поставленных задач*	*УК-1.1:* *Знать понятия и утверждения курса математического анализа, связи между понятиями дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных, числовыми и функциональными рядами.* *УК-1.2:* *Владеть основными методами доказательства утверждений курса математического анализа* *УК-1.3:* *Уметь приводить примеры/контрпримеры для определений и утверждений курса математического анализа, уметь обобщать доказательства утверждений на более общие случаи.*	*Коллоквиум*	*Экзамен:* *Контрольные вопросы* *Задачи*
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в	*ОПК-1.1: Знает методы решения задач из области математических и естественных наук* *ОПК-1.2: Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических и*	*ОПК-1.1:* *Знать алгоритмы исследования функций при построении графиков и при вычислении основных характеристик геометрических фигур и физических величин, используя*	*Контрольная работа*	*Экзамен:* *Контрольные вопросы* *Задачи*

профессиональной деятельности	естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3: Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности в области математических и естественных наук	фундаментальные методы и приемы математического анализа. Уметь решать математические задачи и проблемы на основе полученных знаний из математического анализа при вычислении длины кривых, площади плоских фигур, объемов и массы тел, площади поверхностей, координат центра масс. Владеть различными методами и способами вычисления пределов, методами дифференциального и интегрального исчисления, методами разложения функции в степенные ряды и ряды Фурье. ОПК-1.2: Уметь проводить доказательства математических утверждений на основе опыта аналогичных доказательств из курса математического анализа. ОПК-1.3: Уметь переводить на математический язык задачи, поставленные в терминах других предметных областей и использовать превосходства математической формулировки для их решения. Знать математические модели в конкретных прикладных задач и методы их исследования с помощью математического анализа.		
ОПК-3: Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	ОПК-3.1: Знает основы педагогической деятельности ОПК-3.2: Умеет использовать в педагогической	ОПК-3.1: Знать обобщения школьного курса математики из курса математического анализа.	Контрольная работа	Экзамен: Контрольные вопросы Задачи

	деятельности научные знания в сфере математики и информатики *ОПК-3.3: Владеет навыками использования в педагогической деятельности научных знаний в сфере математики и информатики*	*ОПК-3.2:* *Уметь определять, какие школьные задачи можно решить с помощью аппарата математического анализа.* *ОПК-3.3:* *Владеть основными формулами и приемами для решения школьных задач методами математического анализа.*		

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	**21**
Часов по учебному плану	**756**
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	**256**
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	**128**
- КСР	**8**
самостоятельная работа	**220**
Промежуточная аттестация	**144** **Экзамен**

3.2. <u>Содержание дисциплины</u>

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	офо	офо	офо	офо	офо
1. Введение	3	2	0	2	1
2. Вещественные числа	4	2	0	2	2
3. Числовые последовательности	32	20	0	20	12

4. Числовые последовательности	18	10	0	10	8
5. Непрерывные функции	18	10	0	10	8
6. Производная функции	18	10	0	10	8
7. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения	18	10	0	10	8
8. Неопределенный интеграл:	16	8	0	8	8
9. Определенный интеграл	16	8	0	8	8
10. Приложения определенного интеграла	16	8	0	8	8
11. Функции многих переменных и пределы	16	8	0	8	8
12. Непрерывные функции многих переменных	16	8	0	8	8
13. Дифференцирование функции многих переменных	16	8	0	8	8
14. Неявно-заданные функции	16	8	0	8	8
15. Экстремумы функций многих переменных	16	8	0	8	8
16. Числовые ряды	30	10	10	20	10
17. Функциональные последовательности и ряды:	21	7	7	14	7
18. Степенные ряды	30	10	10	20	10
19. Несобственные интегралы	30	10	10	20	10
20. Определенные интегралы, зависящие от параметра	30	10	10	20	10
21. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	20	7	7	14	6
22. Ряды Фурье	30	10	10	20	10
23. Кратные интегралы	44	16	16	32	12
24. Криволинейные интегралы	44	16	16	32	12
25. Поверхностные интегралы	44	16	16	32	12
26. Теория поля (Векторный анализ)	42	16	16	32	10
Аттестация	144				
КСР	8			8	
Итого	756	256	128	392	220

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Введение
Предмет математического анализа. Очерк истории развития математического анализа. Математическая символика, обозначения
2. Вещественные числа.
Числовая прямая. Числовые множества: промежутки, интервалы, лучи. Окрестность точки. Ограниченные и неограниченные множества, грани множества. Существование точных граней ограниченных числовых множеств.
3. Числовые последовательности.
Определение числовой последовательности. Сходимость и предел числовой последовательности. Примеры. Свойства пределов и числовых последовательностей. Теорема о единственности предела, теорема об ограниченности сходящейся последовательности, предельный переход в неравенствах, арифметические действия со сходящимися последовательностями. Бесконечно малые и большие последовательности, связь между ними. Свойства бесконечно малых последовательностей. Предел монотонной последовательности. Число е. Принцип вложенных отрезков.
Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Предельные точки числового множества. Верхний и нижний пределы последовательности. Критерий Коши существования предела.
Полнота числовой прямой.

4. Предел функции.
Функции действительного переменного. Область определения, множество значений. Способы задания функций. График функции. Определение предела функции в точке по Гейне и Коши. Теорема эквивалентности определений. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Свойства пределов функций. Предел суперпозиции. Бесконечно малые функции и их сравнение. Замечательные. Раскрытие неопределенностей. Обобщение понятия предела: односторонние пределы, бесконечно большие функции, пределы на бесконечности. Критерий Коши существования конечного предела функции в точке и на бесконечности.
5. Непрерывные функции.
Свойства непрерывных функций. Локальная устойчивость знака. Различия определения непрерывности функции в точке. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции. Классификация точек разрыва функции. Непрерывность функции на множестве. Непрерывность элементарных функций. Теорема о промежуточных значениях. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на отрезке и достижении точных граней. Условия непрерывности монотонной функции на отрезке. Теорема о непрерывности обратной функции.
6. Производная функции.
Задачи, приводящие к понятию производной функции. Средняя и мгновенная скорость изменения процесса. Производная и дифференциал функции в точке. Дифференцируемость функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная к графику функции в точке. Свойства производных и дифференциалов функций. Производная суперпозиции и обратной функции. Таблица производных. Дифференцируемость элементарных функций. Функции и кривые на плоскости, заданные параметрически. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой, заданной параметрически. Инвариантность формы первого дифференциала. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям значений функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Неинвариантность формы дифференциалов высшего порядка.
7. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.
Локальный экстремум функции. Теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем. Формулы конечных приращений. Формула Тейлора. Различные представления остаточного члена формулы Тейлора. Формула Тейлора для некоторых элементарных функций. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Условие монотонности функции. Достаточные условия локального экстремума. Направления выпуклости, вогнутости функции. Точки перегиба. Достаточное условие перегиба. Асимптоты функции. Общая схема исследования и построения графиков функции. Нахождение глобального экстремума функции. Приближенные методы нахождения корней уравнений. Метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод касательной, оценка погрешности.
8. Неопределенный интеграл.
Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства интеграла. Таблица интегралов. Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Рациональные и дробно рациональные функции. Разложение правильной дробно рациональной функции в сумму простейших дробей. Интегрирование простейших дробей. Метод неопределенных коэффициентов. Рационализация подынтегральной функции. Интегрирование выражений, рационально зависящих от тригонометрических функций. Подстановки Эйлера. Интегрирование дифференциального бинома. Теорема Чебышева.
9. Определенный интеграл.
Задачи о площади подграфика функции, о работе переменной силы, о массе неоднородного стержня. Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл. Интегрируемость и ограниченность функции. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости. Колебание функции на отрезке. Определение равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора. Классы интегрируемых функций. Свойства определенного интеграла и интегрируемых функций. Теорема о среднем. Интеграл как функция

верхнего предела. Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона -Лейбница. Метод замены переменной и интегрирование по частям в определенном интервале.
10. Приложения определенного интеграла.
Понятие кривой на плоскости и в пространстве. Параметризация кривой. Эквивалентность параметризаций. Гладкие и кусочно-гладкие кривые. Определение длины дуги и спрямляемой кривой. Вычисление длины дуги кривой в различных координатах. Дифференциал дуги кривой. Определение площади плоской фигуры. Критерий квадрируемости области. Квадрируемость области со спрямляемой границей. Вычисление площади плоских фигур. Объем тела. Критерий кубируемости тела. Вычисление объема тела с известными сечениями, и тела вращения. Площадь поверхности вращения. Приложения к задачам механики: масса, статические моменты, координаты центра масс, моменты инерции (материальной кривой и пластины). Теорема Гульдина.
11. Функции многих переменных и пределы.
Арифметическое Евклидово пространство. Связное множество в R . Шаровая и кубическая окрестности точки. Открытые и замкнутые множества в R .
11. Последовательность в R^n.
Сходимость и предел последовательности. Покоординатная сходимость. Критерий Коши сходимости последовательности в R . Ограниченные и неограниченные множества в R^n. Теорема Больцано - Вейерштрасса. Компакты. Критерий компактности. Функции многих переменных. График функции двух переменных. Линии и поверхности уровня. Кратные и повторные пределы функции. Свойства пределов. Критерий Коши.
12. Непрерывные функции многих переменных.
Различные определения непрерывности функции в точке. Непрерывность по совокупности переменных и по отдельным переменным. Свойства непрерывных функций. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции на связном множестве. Свойства функции, непрерывной на компакте: теорема Вейерштрасса об ограниченности и существовании глобальных экстремумов, теорема Кантора о равномерной непрерывности.
13. Дифференцирование функции многих переменных.
Частные производные. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции. Достаточное условие дифференцируемости. Линеаризация функций Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала. Абсолютная и относительная погрешность. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Практические следствия инвариантности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала. Частные производные высших порядков. Равенство смешанных производных. Дифференциала высших порядков. Неинвариантность формы высших дифференциалов. Инвариантность при аффинной замене переменных. Формула Тейлора. Оценка остаточного члена и приближенное вычисление функции с помощью формулы Тейлора. Формула Лагранжа конечных приращений.
14. Неявно-заданные функции.
Неявно-заданные функции и система неявных функций, одной и многих переменных. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости. Якобиан системы функции. Вычисление старших производных неявных функций. Уравнения касательной и нормали к графику функции, заданной неявно.
15. Экстремумы функций многих переменных.
Необходимое условие локального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Условный экстремум функции. Метод множителей Лагранжа. Глобальные экстремумы функций (безусловные и условные).
16. Числовые ряды.
Понятие числового ряда. Связь с приближенными вычислениями. Частичные суммы числового ряда, сходимость и расходимость рядов. Сумма, отрезок и остаток ряда. Эквивалентность сходимости числовых рядов и числовых последовательностей. Основные свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости. Расходимость гармонического ряда. Критерий Коши сходимости числовых рядов.

Знакопостоянные ряды. Критерий сходимости знакопостоянных рядов. Признаки сравнения для сходимости знакопостоянного ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов Даламбера, Коши, Раабе. Интегральный признак сходимости. Обобщенные гармонические ряды. Абсолютная и условная сходимости произвольных числовых рядов. Признаки абсолютной сходимости рядов. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Оценки суммы и остатка знакочередующегося ряда, их использование для оценки погрешности вычислений. Признаки Абеля и Дирихле сходимости произвольных рядов. Теорема Римана о зависимости суммы условно (неабсолютно) сходящегося ряда от порядка следования членов.
17. Функциональные последовательности и ряды.
Понятия функциональной последовательности и функционального ряда, их сходимость в точке и области. Эквивалентность сходимости функциональных последовательностей и рядов. Равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Достаточные признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов. Функциональные свойства рядов, связанные с равномерной сходимостью. Теорема о почленном переходе к пределу. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда. Теорема Дини. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании.
18. Степенные ряды.
Понятие степенного ряда. Лемма Абеля об абсолютной сходимости. Область и радиус сходимости. Вычисление радиуса сходимости: формулы Даламбера, Коши и Коши - Адамара. Свойства степенного ряда: равномерная сходимость на внутреннем отрезке; непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование на интервале сходимости. Ряды Тейлора. Аналитические функции. Достаточное условие аналитичности. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора. Понятие ряда с комплексными членами. Формулы Эйлера.
19. Несобственные интегралы.
Задачи, приводящие к понятию несобственных интегралов. Интеграл с бесконечными пределами. Сходимость и расходимость интегралов. Критерий Коши. Замена переменной и интегрирование по частям. Сходимость интегралов от неотрицательных функций. Абсолютная сходимость. Признаки абсолютной сходимости. Условная сходимость. Признак Абеля -Дирихле. Интегралы от неограниченных функций. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости. Эквивалентность несобственных интегралов обоих типов. Главные задачи Коши несобственных интегралов.
20. Определенные интегралы, зависящие от параметра.
Равномерная сходимость функций по параметру. Критерий Коши равномерной сходимости. Определенный интеграл как функция параметров. Предельный переход под знаком интеграла. Непрерывность, дифференцирование, интегрирование по параметру. Равенство повторных интегралов. Непрерывность и дифференцирование по параметру в случае, когда пределы интегрирования также зависят от параметра. Примеры приложения к вычислению определенных интегралов.
21. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.
Интегралы с бесконечными пределами, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Достаточный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости. Предельный переход, непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру. Равенство повторных интегралов. Интегралы от неограниченных функций, зависящие от параметра. Эйлеровы интегралы.
22. Ряды Фурье.
Периодические функции. Понятие гармоники, амплитуды, фазы. Тригонометрическая система функций и тригонометрический ряд. Ортогональность тригонометрической системы. Вычисление коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда через его сумму. Определение тригонометрического ряда Фурье. Периодическое продолжение произвольной функции. Стремление коэффициентов Фурье к нулю. Представление частичной суммы ряда Фурье для абсолютно-интегрируемой функции интегралом Дирихле. Принцип локализации. Поточечная сходимость рядов

Фурье. Регулярные точки функции. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций на отрезке тригонометрическими и алгебраическими многочленами. Полнота и замкнутость тригонометрической системы. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Условие полноты Парсеваля. Достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье. Оценки скорости сходимости рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Ряды Фурье на произвольном интервале. Комплексная запись рядов Фурье. Интеграл Фурье и преобразование Фурье.
23. Кратные интегралы.
Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла. Определение и свойства двойного интеграла. Приведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных. Геометрический смысл якобиана преобразования. Полярная замена координат. Тройные и многократные интегралы. Приведение к повторным. Замена переменных. Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве. Геометрические приложения двойных интегралов: объем бруса, площадь поверхности в случае явного и параметрического задания. Приложения кратных интегралов к задачам механики: масса, статические моменты, центр масс, моменты инерции.
24. Криволинейные интегралы.
Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл первого ряда, его вычисление. Криволинейный интеграл второго ряда. Соотношение криволинейных интегралов. Вычисление криволинейного интеграла второго ряда Ориентация контура. Плоская односвязная область. Интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью формулы Грина. Условия независимости интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции двух переменных по ее полному дифференциалу.
25. Поверхностные интегралы.
Поверхностный интеграл первого рода. Вычисление с помощью двойного интеграла. Двусторонние поверхности. Поверхностный интеграл второго рода. Вычисление с помощью двойного интеграла. Связь поверхностных интегралов. Поверхностно односвязная область. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от пути интегрирования. Восстановление функции трех переменных по ее полному дифференциалу. Пространственно односвязная область. Формула Остроградского и ее геометрические приложения.
26.Теория поля (Векторный анализ) Физические задачи, приводящие к понятиям скалярного и векторного полей.
27. Оператор Гамильтона. Градиент. Поле градиентов. Дивергенция (расходимость) векторного поля. Ротор. Поле роторов. Циркуляция векторного поля.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Математический анализ, https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=6875.

Иные учебно-методические материалы:
1. ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: Учеб.: ФИЗМАТЛИТ, 2001
(50 экз.)

2. КУДРЯВЦЕВ Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 1. 2002. - 400 с. (40 экз.)

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Коллоквиум) для оценки сформированности компетенции УК-1:

I семестр

1. Докажите неравенство Бернулли для всех натуральных n

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (x \geq 0).$$

2. Докажите бином Ньютона.

3. Ограниченные и неограниченные множества. Приведите примеры. Является ли последовательность ограниченной $\{n^{(-1)^n}\}_{n\geq 1}$. 4. Определение точной верхней и точной нижней граней. Найдите точную нижнюю грань для числовой последовательности $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+2}\right\}_{n\geq 1}$

5. Докажите теорему о вложенных отрезках.

6. Функции (отображения) и их виды. Приведите примеры.

7. Композиция отображений. Приведите примеры.

8. Обратная функция. Примеры.

9. Типы числовых функций: ограниченные, монотонные. Приведите примеры.

10. Типы числовых функций: четные (нечетные), периодические. Приведите примеры.

11. Последовательности и их типы (ограниченные, монотонные). Способы задания последовательности (формула общего члена, рекуррентное задание; примеры)

12. Формулы общего члена и суммы для арифметической и геометрической прогрессии

13. Определение предела последовательности. Примеры. Доказательства по определению.

14. Теорема о единственности предела последовательности.

15. Необходимое условие сходимости числовой последовательности.

16. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Сравнение бесконечно малых.

17. Бесконечно большие последовательности и их свойства. Шкала бесконечно больших.

18. Арифметические свойства предела последовательности.

19. Переход к пределу в неравенствах.

20. Докажите теорему «о зажатой последовательности».

21. Докажите теорему Вейерштрасса о монотонной последовательности.

22. Число е.

23. Докажите теорему о вложенных отрезках (усиленный вариант). Примеры её применения.

24. Докажите теорему Больцано-Вейерштрасса о подпоследовательностях.

25. Частичные пределы последовательности. Верхние и нижние пределы последовательности и их свойства.

26. Докажите критерий Коши сходимости числовой последовательности.

II семестр

1. Условия возрастания/убывания функции одного переменного.

2. Докажите необходимые условия существования точек экстремума функции одного переменного.

3. Докажите достаточные условия существования точек экстремума функции одного переменного.

4. Дайте определение выпуклых (вогнутых) функций. Условия выпуклости (вогнутости) функции.

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

6. Разложение e^x, sinx, cosx по формуле Маклорена.

7. Разложение ln(1+x), (1+x)^a по формуле Маклорена.

8. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши.

9. Правило Лопиталя раскрытия неопределённости 0 / 0 .

10. Правило Лопиталя раскрытия неопределённости ¥ / ¥.

11. Неопределенный интеграл и первообразная: определение, описание множества первообразных.

12. Свойства первообразных (линейность, замена переменных, интегрирование по частям).

13. Интегрирование рациональных функций.

14. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

15. Интегралы с подстановками Эйлера.

16. Биномиальный дифференциал и его интегрирование.

17. Интегрирование тригонометрических функций.

III семестр

1. Теорема о неявной функции (определяющей функцию одного переменного - теорема 1).

2. Теорема о неявной функции (определяющей функцию нескольких переменных - теорема 2).

3. Теорема о неявной функции (для системы функций -теорема 3).

4. Производные высших порядков.

5. Докажите теорему о равенстве смешанных частных производных.

6. Неинвариантность формы второго дифференциала

7. Формула Тейлора для функции нескольких переменных Экстремумы функции нескольких переменных, необходимое условие экстремума.

8. Достаточное условие экстремума.

9. Условный экстремум.

10. Экстремумы функции нескольких переменных, необходимое условие экстремума.

11. Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных.

12. Условный экстремум. Примеры. Необходимое условие условного экстремума

13. Метод Лагранжа. Примеры.

14. Числовые ряды. Критерий Коши для рядов. Необходимое условие сходимости.

15. Примеры: геометрическая прогрессия, гармонический и обобщенный гармонический ряд.

16. 1-й признак сравнения положительных рядов.

17. 2-й признак сравнения положительных рядов.

18. Признак Коши сходимости положительного ряда.

19. Признак Даламбера сходимости положительного ряда.

20. Интегральный признак сходимости.

21. Признак Раабе сходимости положительного ряда.

22. Признак Гаусса.

23. Знакопеременные, знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

24. Признаки Абеля и Дирихле.

25. Свойство ассоциативности сходящегося ряда.

26. Свойство перестановочности членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана.

27. Умножение рядов. Теорема Мертенса и теорема Коши для умножения рядов

28. Бесконечные произведения и их свойства.

IV семестр

1. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Достаточный признак равномерной сходимости.

2. Критерий равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

3. Переход к пределу для семейства несобственных интегралов.

4. Дифференцирование несобственных интегралов по параметру

5. Перестановка пределов интегрирования для семейства несобственных интегралов с бесконечными пределами.

6. Замечательные классические интегралы.

7. Бэта-функция и ее свойства (симметрия, формула понижения).

8. Бэта-функция и ее свойства (формула эквивалентного представления, формула дополнения).

9. Гамма-функция и ее свойства (дифференцируемость, формула понижения).

10. Гамма-функция и ее свойства (график Г-функции, связь В- и Г-функций, формула дополнения).

Критерии оценивания (оценочное средство - Коллоквиум)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

Оценка	Критерии оценивания
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок.
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок.
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1 семестр

Билет 1.

1) Используя логические символы, записать утверждение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$.

2) Докажите, что предел $\lim\limits_{x\to1} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$ не существует.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3e^{2x})}{\ln(2+5e^{6x})}$.

4) Определите порядок бесконечно большой функции $f(x)=\frac{5x^4-3x^2-1}{3x^4-x^2}$ при $x\to0$. Запишите главную часть функции при $x\to0$.

5) Найдите точки разрыва функции $y=x^2\sin\frac{1}{x}$. Определите их род.

6) Исследуйте функцию $f(x)=\sqrt{x}$ на равномерную непрерывность на множестве $E=(0;+\infty)$.

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{xe^x+1}{xe^{2x}+1}\right)^{1/x^2}$.

Билет 2.

1) Используя логические символы, записать утверждение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2) Докажите, что предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2}{x-1}=1$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^5-x^2}{\sqrt{10x^{10}+6x^4-1}}$.

4) Определите порядок бесконечно малой функции $f(x)=3^{x^3}-3$ при $x\to1$. Запишите главную часть функции при $x\to1$.

5) Найдите точки разрыва функции $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$. Определите их род.

6) Исследуйте функцию $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ на равномерную непрерывность на множестве $E=(0;\,1)$.

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x+\operatorname{arctg}^2 x\right)^{1/\operatorname{arctg} x^2}$.

---

2 семестр

Билет 1.

1. $\int \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x})^2}$ 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ 3. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$

4. $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$ 5. $\int \frac{x+\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2+1}$.

Билет 2.

1. $\int \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x})^2}$ 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ 3. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$

4. $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$ 5. $\int \frac{x+\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2+1}$.

Билет 3.

1. $\int \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x})^2}$ 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ 3. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$

4. $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$ 5. $\int \frac{x+\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2+1}$.

3 семестр

Билет 1.

Исследуйте ряды на сходимость:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+3} \arcsin \frac{1}{n^2+2}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-\cos \frac{\pi}{\sqrt{n}})$.

Билет 3.

Исследуйте ряды на сходимость:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2 4^{5n}}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n\sqrt{3}}\right)^{\alpha}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin n}$.

Билет 2.

Исследуйте ряды на сходимость:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln(1+n^2)}{\sqrt{n^3+3n+2}}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\cos \frac{1}{n} - \cos\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\sin n}{\sqrt{n}})$.

4 семестр

Билет 1.

1. Вычислите криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{\Gamma}(2x+y)ds$, где $\Gamma: \ y=2x$, $1 \le x \le 4$.

2. Вычислите криволинейный интеграл II рода $\int\limits_{L} ydx + 3xdy + z^2dz$, где

$$L: \begin{cases} z = x^2+y^2-1, \\ z = 3. \end{cases}$$

Кривая L ориентирована положительно относительно оси Oz.

3. Применив теорему Гаусса-Остроградского, вычислите интеграл $\int\int_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

4. Найдите поток векторного поля $\overrightarrow{A} = x\overrightarrow{i} - (x+2y)\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}$ через полную поверхность S, ограниченную $x^2+y^2=1$, $z=0$, $x+2y+3z=6$, и ориентированную внешним вектором нормали.

Билет 2.

1. Вычислите криволинейный интеграл II рода $\int\limits_L y\,dx + x^2 dy$, где $L: \ y = 3x - 1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x от 1 до 2.

2. Применив формулу Грина, вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ по замкнутой кривой $\Gamma: \ x^2 + y^2 = 1$, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева.

3. Вычислите поверхностный интеграл I рода $\int\int_S (x + y + z)ds$, где S – часть плоскости $x + 2y + 4z = 4$, выделяемая условиями $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

4. Проверьте потенциальность поля $\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + e^z\overrightarrow{k}$ и найдите его потенциал.

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-3:

1 семестр

Билет 1.

1) Найдите область определения функции $f(x) = \arcsin\frac{1}{x}$.

2) Дана функция $f(x) = x^2 + 5x - 6$. Найдите $f(x^2)$.

3) Для функции $y = -2x + 3$ найдите обратную.

4) Определите, какая из данных функций является нечетной: $f(x) = x^4$, $f(x) = 3x^5 - x^3 + 1$, $f(x) = x - 2\sin 3x$.

Билет 2.

1) Найдите область определения функции $f(x) = \ln|x^2 - 4|$.

2) Найдите композицию $f(g(x))$ для функций $f(x) = x^3$, $g(x) = 3^x$.

3) Являются ли функции $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ взаимно обратными? Найдите обратную функцию для $y = 1 + \sqrt{x}$.

4) Определите, какая из данных функций является четной: $f(x) = x^4$; $f(x) = 3x^5 - x^3 + 1$; $f(x) = x|x| - 2\sin 3x$.

2 семестр

Билет 1.

1\. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y = x^2$, $y = x + 2$.

2\. Найдите длину кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $0 \le x \le 1$.

3\. Найдите площадь одного лепестка лемнискаты Бернулли: $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

4\. Найдите объем тела, полученного вращением фигуры вокруг оси Ox, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Билет 2.

1\. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y = x^2$, $y = x^3$.

2\. Найдите длину кривой $y = \ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/4$.

3\. Найдите площадь фигуры $\rho = \sin 3\varphi$.

4\. Найдите объем тела, полученного вращением фигуры вокруг оси Oy, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

3 семестр

Билет 1.

1\. Разложите функцию $f(x, y) = e^x \sin y$ по формуле Маклорена до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2\. Исследуйте функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$ на экстремум.

3\. Найдите условные экстремумы функцию $z = x^2 + y^2$ относительно уравнения связи $3x + 2y - 6 = 0$.

4\. Найдите наибольшее значение функции $z = xy + x + y$ на множестве $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$.

Билет 2.

1\. Разложите функцию $f(x, y) = \sqrt{1 + x + y}$ по формуле Маклорена до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2\. Исследуйте функцию $z = x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 3y$ на экстремум.

3\. Найдите условные экстремумы функцию $z = x + y^2$ относительно уравнения связи $x + y - 6 = 0$.

4\. Найдите наименьшее значение функции $z = xy + x + y$ на множестве $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$.

4 семестр

Билет 1.

1. Вычислите двойной интеграл $\int\int_G xy^2 dx\, dy$, где $G = \{x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$.

2. Вычислите тройной интеграл $\int\int\int_G y\, dx\, dy\, dz$, где G – пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + y + z = 4$.

3. Найдите модуль якобиана $|J|$ при переходе от декартовых координат к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$.

Билет 2.

1. Вычислите тройной интеграл $\int\int\int_G x^2 + y^2 dx\, dy\, dz$, где $G = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

2. Найдите модуль якобиана $|J|$ при переходе от декартовых координат к сферическим координатам $x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi$.

3. Вычислите объем пирамиды G, ограниченной плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ x + y - z = 1,\ x + y + z = 1$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Решено 50% и более задач.
не зачтено	Решено менее 50% задач.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	**плохо**	**неудовлетворительно**	**удовлетворительно**	**хорошо**	**очень хорошо**	**отлично**	**превосходно**
	не зачтено		**зачтено**				
Знания	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	отказа обучающегося от ответа		ошибок	несколько негрубых ошибок	несколько несущественных ошибок	нет.	
Умения	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
Навыки	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		**Уровень подготовки**
зачтено	**превосходно**	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	**неудовлетворительно**	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

I семестр

1. Докажите бином Ньютона.

2. Теорема о вложенных отрезках.

3. Функции (отображения) и их виды. Приведите примеры.

4. Композиция отображений. Приведите примеры.

5. Обратная функция. Примеры.

6. Типы числовых функций: ограниченные, монотонные. Приведите примеры.

7. Типы числовых функций: четные (нечетные), периодические. Приведите примеры.

8. Докажите теорему о единственности предела последовательности.

9. Арифметические свойства предела последовательности.

10. Переход к пределу в неравенствах.

11. Докажите теорему «о зажатой последовательности».

12. Докажите теорему Вейерштрасса о монотонной последовательности.

13. Число e.

14. Докажите теорему о вложенных отрезках (усиленный вариант). Примеры её применения.

15. Докажите теорему Больцано-Вейерштрасса о подпоследовательностях.

16. Докажите критерий Коши сходимости числовой последовательности.

17. Докажите эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне.

18. Докажите первый замечательный предел.

19. Докажите второй замечательный предел.

20. Критерий Коши для предела функции.

21. Непрерывность арифметических операций и композиции непрерывных функций.

22. Первая теорема Больцано –Коши (о существовании корня

23. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной.

24. Определение дифференцируемости функции в точке. Дифференциал и его геометрический смысл.

25. Дифференцируемость и существование производной. Эквивалентность этих понятий.

26. Свойства производных (производная суммы, разности, произведения, частного).

27. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Примеры.

28. Докажите лемму о возрастании функции в точке.

29. Докажите теорему Ферма об экстремуме.

30. Докажите теорему Ролля.

31. Докажите теорему Лагранжа.

32. Докажите теорему Коши.

33. Докажите формулу Лейбница.

II семестр

1. Докажите необходимые условия существования точек экстремума функции одного переменного.

2. Докажите достаточные условия существования точек экстремума функции одного переменного.

3. Дайте определение выпуклых (вогнутых) функций. Условия выпуклости (вогнутости) функции.

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

6. Определение интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости.

7. Суммы Дарбу и их свойства.

8. Критерий интегрируемости по Риману.

9. Достаточное условия интегрируемости (для непрерывных функций и функций с конечным множеством точек разрыва)

10. Достаточные условия интегрируемости для монотонных функций.

11. Теорема об интегрируемости суммы и произведения функций.

12. Теорема об интегрируемости модуля от функции

13. Свойства неравенств для определенных интегралов.

14. Аддитивное свойство определенного интеграла.

15. Первая теорема о среднем и ее обобщение. Вторая теорема о среднем.

16. Свойства интеграла с переменным верхним пределом.

17. Формула Ньютона – Лейбница.

18. Интегрирование по частям и замена переменных для определенного интеграла.

19. Площадь в декартовых и полярных координатах.

20. Метрические пространства: определение и примеры

21. Типы множеств в метрическом пространстве (открытые, замкнутые) и типы точек (предельные, граничные, внутренние, внешние).

22. Пределы последовательностей в метрических пространствах и их свойства.

23. Компактные множества в метрических пространствах. Эквивалентные определения. Необходимое условие компактности.

24. Функции на метрических пространствах, непрерывность.

25. Образ компактного множества при непрерывном отображении

26. Равномерная непрерывность. Свойства непрерывной функции на компакте (обобщение теоремы Кантора).

27. Сходимость в R^n.

28. Производная композиции дифференцируемых функций.

29. Достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.

III семестр

1. Теорема о неявной функции (определяющей функцию одного переменного - теорема 1).

2. Теорема о неявной функции (определяющей функцию нескольких переменных - теорема 2).

3. Теорема о неявной функции (для системы функций -теорема 3).

4. Докажите теорему о равенстве смешанных частных производных.

5. Числовые ряды. Критерий Коши для рядов. Необходимое условие сходимости.

6. Примеры: геометрическая прогрессия, гармонический и обобщенный гармонический ряд.

7. 1-й признак сравнения положительных рядов.

8. 2-й признак сравнения положительных рядов.

9. Признак Коши сходимости положительного ряда.

10. Признак Даламбера сходимости положительного ряда.

11. Интегральный признак сходимости.

12. Признак Раабе сходимости положительного ряда.

13. Признак Гаусса.

14. Знакопеременные, знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

15. Признаки Абеля и Дирихле.

IV семестр

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.

2. Теорема об интегрируемости собственного интеграла, зависящего от параметра.

3. Теорема о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра.

4. Теорема о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра, с переменными пределами интегрирования.

5. Двойной интеграл: геометрический смысл и определение.

6. Мера Жордана на плоскости: определение и основные свойства.

7. Примеры измеримых и неизмеримых по Жордану множеств

8. Мера Жордана в n-мерном пространстве. Множества (лебеговой) меры 0: примеры и свойства.

9. Определение кратного интеграла. Суммы Дарбу. Интеграл Дарбу

10. Необходимое условие интегрируемости. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Критерий Лебега

11. Свойства кратных интегралов

12. Теорема Фубини. Повторное интегрирование для двойных и тройных интегралов

13. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, сферические, цилиндрические координаты

14. Криволинейные интегралы I рода и их свойства.

15. Криволинейные интегралы II рода. Эквивалентные условия потенциального поля.

16. Односвязные области. Условие потенциального поля для односвязной области.

17. Формула Грина.

18. Поверхностные интегралы I рода. Площадь поверхности.

19. Поверхностные интегралы II рода.

20. Формула Гаусса-Остроградского.

21. Формула Стокса.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

I семестр

1. Докажите неравенство Бернулли для всех натуральных n

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (x \geq 0)$.

2. Ограниченные и неограниченные множества. Приведите примеры. Является ли последовательность ограниченной $\{n^{(-1)^n}\}_{n\geq 1}$.

3. Определение точной верхней и точной нижней граней. Найдите точную нижнюю грань для числовой последовательности $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+2}\right\}_{n\geq 1}$

4. Способы задания числовой последовательности. Приведите примеры.

5. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Сравнение бесконечно малых.

6.. Бесконечно большие последовательности и их свойства. Шкала бесконечно больших.

7. Частичные пределы последовательности. Верхние и нижние пределы последовательности и их свойства.

8. Предел функции. Определение на языке «эпсилон-дельта» (по Коши) и на языке последовательностей (по Гейне). Примеры доказательства по определению.

9. Арифметические свойства предела функции и переход к пределу в неравенствах.

10. Односторонние пределы. Бесконечные пределы.

11. Сравнение бесконечно малых функций. Примеры применения эквивалентных бесконечно малых.

12. Непрерывность функции. Определение и примеры.

13. Точки разрыва и их классификация.

14. Определение дифференцируемости функции в точке. Дифференциал и его геометрический смысл

15. Свойства производных (производная суммы, разности, произведения, частного).

II семестр

1. Дайте определение выпуклых (вогнутых) функций. Условия выпуклости (вогнутости) функции.

2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши.

4. Правило Лопиталя раскрытия неопределённости 0 / 0

5. Правило Лопиталя раскрытия неопределённости ∞/∞.

6. Формула Ньютона – Лейбница.

7. Несобственные интегралы. Их свойства.

8. Признаки сравнения несобственных интегралов от знаконеотрицательных функций.

9. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла. Признак Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.

10. Связь между повторными и двойными пределами.

III семестр

1. Производные высших порядков.

2. Неинвариантность формы второго дифференциала

3. Свойство ассоциативности сходящегося ряда.

4. Свойство перестановочности членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана.

5. Умножение рядов. Теорема Мертенса и теорема Коши для умножения рядов

6. Бесконечные произведения и их свойства.

7. Функциональные последовательности. Достаточные условия равномерной сходимости функциональной последовательности.

8. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности.

9. Признак Вейерштрассе равномерной сходимости функционального ряда. Примеры.

10. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

11. Предельный переход при равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов непрерывных функций.

12. Признак Дини равномерной сходимости.

13. Равномерная сходимость и интегрирование.

14. Равномерная сходимость и дифференцирование.

15. Степенные ряды. Теорема об области сходимости степенного ряда.

16. Формула Коши-Адамара.

17. Свойства суммы степенного ряда внутри интервала сходимости.

18. Разложение функции в степенной ряд. Необходимое условие разложения.

IV семестр

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.

2. Теорема об интегрируемости собственного интеграла, зависящего от параметра.

3. Теорема о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра.

4. Теорема о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра, с переменными пределами интегрирования.

5. Бэта-функция и ее свойства (симметрия, формула понижения).

6. Бэта-функция и ее свойства (формула эквивалентного представления, формула дополнения).

7. Гамма-функция и ее свойства (дифференцируемость, формула понижения).

8. Гамма-функция и ее свойства (график Г-функции, связь В- и Г-функций, формула дополнения)

9. Мера Жордана на плоскости: определение и основные свойства.

10. Примеры измеримых и неизмеримых по Жордану множеств.

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-3

1 семестр

1. Дайте определение предела числовой последовательности. Приведите примеры. Проведите доказательство по определению.

2. Необходимое условие сходимости числовой последовательности. Приведите примеры, показывающие, что данное условие не является достаточным.

3. Обобщение понятия предела. Бесконечные пределы.

4. Приведите примеры применения замечательных пределов.

5. Физический и геометрический смысл производной.

2 семестр

1. Асимптоты графика функции и их уравнения

2. Разложите по формуле Маклорена функции e^x, sinx, cosx.

3. Разложите по формуле Маклорена функции ln(1+x), (1+x)^a.

4. Интегрирование рациональных функций. Приведите примеры.

5. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Приведите примеры.

6. Интегралы с подстановками Эйлера. Приведите примеры.

7. Биномиальный дифференциал и его интегрирование. Приведите примеры.

8. Интегрирование тригонометрических функций. Приведите примеры.

9. Площадь в декартовых и полярных координатах. Приведите примеры.

10. Объем тела вращения. Приведите примеры.

11. Длина кривой. Приведите примеры.

12. Площадь поверхности вращения. Приведите примеры.

13. Касательная плоскость к графику и её уравнение. приведите примеры.

3 семестр

1. Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Приведите примеры.

2. Экстремумы функции нескольких переменных, необходимое условие экстремума.

3. Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных.

4. Условный экстремум. функции нескольких переменных.

5. Метод Лагранжа. Примеры.

6. Признак Вейерштрассе равномерной сходимости функционального ряда. Примеры.

7. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

8. Предельный переход при равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов непрерывных функций.

9. Равномерная сходимость и интегрирование функционального ряда

10. Равномерная сходимость и дифференцирование функционального ряда.

11. Степенные ряды. Теорема об области сходимости степенного ряда.

12. Ортогональная и ортонормальная система функций на [a; b]. Теорема о разложимости функции по ортогональной системе функций.

13. Ортогональность тригонометрической системы функций.

14. Обобщенный ряд Фурье. Тригонометрический ряд Фурье.

15. Теорема Дирихле о разложимости функции в ряд Фурье.

16. Признак Дини о сходимости ряда Фурье.

17. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

18. Разложение функции на (0;) в ряд косинусам/синусам.

19. Разложение в ряд Фурье периодической функции любого периода T=2l.

20. Ряд Фурье в комплексной форме.

21. Минимальное свойство отрезков ряда Фурье.

22. Неравенство Бесселя.

23. Сходимость рядов Фурье «в среднем».

24. Квадратичное приближение тригонометрическими многочленами. Свойства коэффициентов рядов Фурье.

25. Порядок коэффициентов Фурье (теорема о связи скорости сходимости ряда Фурье со степенью гладкости функции f (x)).

26. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье.

27. Полнота/замкнутость тригонометрической системы функций (теорема Парсеваля-Ляпунова).

28. Теорема о почленном интегрировании ряда Фурье.

29. Интеграл Фурье. Теорема о представлении функции интегралом Фурье.

30. Интеграл Фурье для четных/нечетных функций, заданных на [0, +∞).

4 семестр

1. Разложение в ряд Маклорена функций y=ex , cos x, sin x.

2. Разложение в ряд Маклорена функций y=ln(1+x), y=(1+x)^a.

3. Ряды Фурье. Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье.

4. Замечательные интегралы.

5. Геометрический смысл двойного интеграла.

6. Геометрический смысл тройного интеграла.

7. Геометрический смысл поверхностного интеграла 1 рода.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.

Оценка	Критерии оценивания
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок.
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок.
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа.

5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, если

1) $\forall\,\varepsilon > 0\ \forall\,n \in \mathbb{N}\ |x_n - A| < \varepsilon$;
2) $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\,n \ge n_0\ |x_n - A| < \varepsilon$;
3) $\exists\,\varepsilon_0 > 0\ \forall\,n \in \mathbb{N}\ \exists\,n_0 \ge n$: $|x_{n_0} - A| \ge \varepsilon_0$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

2. Укажите ограниченную, но расходящуюся последовательность:

1) $\{\sin n\}_{n\ge1}$;
2) $\{n^2 + 2n\}_{n\ge1}$;
3) $\{1/(n+4)\}_{n\ge1}$.

3. Укажите неограниченную последовательность, но не бесконечно большую:

1) $\{2/n\}_{n\ge1}$;
2) $\{n^2 + 6n + 1\}_{n\ge1}$;
3) $\{n^{(-1)^n}\}_{n\ge1}$.

4. Укажите бесконечно большую последовательность:

1) $\{(-1)^n/n\}_{n=1}^{\infty}$;
2) $\frac{n^2}{1-n}$;
3) $\sin n!$.

2 семестр

1. Приведите пример ограниченной, но не интегрируемой по Риману функции на отрезке [0; 1].

2. Найти предел с помощью определенного интеграла

3. Доказать для интеграла $J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, $n \geqslant 2$, рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

4. Доказать неравенство

$$0 < \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x+1} < 0{,}1$$

3 семестр

1. Приведите примеры расходящихся рядов, сумма которых есть сходящийся/расходящийся ряд.

2. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ сходятся и их суммы соответственно равны s и σ, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \zeta_n$, где $\zeta_n = \lambda z_n + \mu w_n$, сходится при любых комплексных λ, μ и его сумма равна $\lambda s + \mu\sigma$.

3. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$, где $a_n \in R$, $b_n \in R$ $(n \in N)$, сходятся, то сходятся и ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$.

4. Доказать, что если $a_n > 0$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ для всех $n \in N$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

5. Показать, что ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots,$$

полученный из сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ перестановкой его членов, расходится.

6. Из гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ выброшены все члены, номера которых содержат цифру 9. Доказать, что полученный ряд будет сходящимся, а его сумма меньше 20.

7. Исходя из определения равномерной сходимости доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad -q \leqslant x \leqslant q, \quad 0 < q < 1;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1;$

4 семестр

1 С помощью равенства Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha, \\ 0, & \alpha < |x| < \pi, \end{cases}$$

найти суммы рядов

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{и} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2. Построить последовательность открытых множеств, пересечение которых не является открытым.

3. Доказать, что для того, чтобы точка $a \in R^n$ была точкой прикосновения множества $E \subset R^n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек $x^{(m)} \in E$, сходящаяся к a.

4. Найти все точки прикосновения множества $E = \{x \in R^2\colon\ x_2 = \sin(1/x_1)\}$, не принадлежащие E.

5. Построить множество, все точки которого изолированные, а множество его предельных точек непустое.

6. Доказать, что множество изолированных точек произвольного множества не более чем счетно.

5.3.5 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1 семестр:

На оценку «удовлетворительно»:

1. Найдите предел числовой последовательности $x_n = (\frac{n^2+1}{n^2-1})^{n^2}$

2. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+5)(x-1)}{1+4x^3}.$$

3. Найти точки разрыва функции и установить их род $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.

4. Найдите $y^{(10)}(x)$, если $y(x) = \ln(4x+5)$.

На оценку «хорошо»:

1. Докажите, что последовательность $x_n = \frac{2^n+1}{4+(-2)^n}$ расходится.

2. Докажите, что последовательность $\{n^{(-1)^n}\}_{n\geq 1}$. является неограниченной.

3. Найдите $y'(x)$ для функции, заданной параметрически:

$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin t.$$

5. Для последовательности $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+2}\right\}_{n\geq 1}$ найдите множество частичных пределов.

6. Найдите $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n-4})$.

На оценку «отлично»:

8. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$.

9. Определите порядок бесконечно малой функции $f(x) = x\sin x^3$ при $x \to 0$.

10. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}+x^3-1}{\ln(\cos x)}$

11. Доказать, что последовательность расходится $x_n = \frac{2^{n+1}-(-3)^n}{(-2)^n+3^{n+1}}$.

На оценку «превосходно»:

12. Найдите $y''(x)$ для функции, заданной параметрически:

$$x(t) = t^2+6t-1, y(t) = 2t-1.$$

13. Найдите $y''(x)$ для функции, заданной неявно уравнением:

$$y^3-3y^2+y+6=0.$$

14. Используя формулу Лейбница, найдите $y^{100}(1)$ для функции $y = x^2\ln x$.

15. Исследуйте функцию $y = x|x|$ на дифференцируемость.

2 семестр:

На оценку «удовлетворительно»

1. Разложите функцию $y = \frac{1}{2x+1}$ по формуле Маклорена до $o(x^n)$.
2. Найти интеграл: $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx$.
3. Найдите частные производные функции $z = 4x^5y^3 + 3x + 5y^6 - 1$.
4. Сходится ли несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$? В случае сходимости найти его

значение.

На оценку «хорошо»:

1. Разложите по формуле Тейлора функцию $y = e^{2x-2}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ до $o((x-1)^n)$.
2. Найти интеграл: $\int (2x-1)\cos x\,dx$.
3. Найти интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{(x^2+1)(x+2)}$.
4. Найдите $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial^2 y}$ для $z = x^3 \sin(2y+1)$.

На оценку «отлично»:

1. Докажите, что функция $y = \begin{cases} 0, \text{если } x - \text{рациональное число}, \\ 1, \text{если } x - \text{иррациональное число}. \end{cases}$

не интегрируема на отрезке [0; 1].

2. Найти градиент функции $z = \ln(3x^2 + 5y^2)$ в точке (2;3).
3. Найти интеграл: $\int \frac{\cos x}{(3\sin x + 4)^3} dx$.
4.

Найдите двойной предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \frac{\sin 2xy}{xy}$.

На оценку «превосходно»

1. Исследуйте интеграл на абсолютную сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.
2.

Найдите параметр a, при котором функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ \text{a}, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

непрерывна?

3. Найдите повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

4. Найдите производную функции $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2$ по направлению вектора $\bar{l} = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ в точке (1; 1).

3 семестр

На оценку «удовлетворительно»

Билет 1

1. Найти $du(x,y)$, заданной неявно уравнением:

$$x + y + u = e^u.$$

2. Разложите по формуле Маклорена до второго порядка включительно функцию $f(x,y) = e^x \sin y$ в окрестности точки $(0;\,0)$.
3. Исследуйте функцию $u = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$ на экстремум.
4. Исследуйте ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$.
5. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$.

Билет 2

1. Найдите $du(x,y)$, заданной неявно уравнением:

$$e^{x+y+u} = eu.$$

2. Разложите по формуле Маклорена до второго порядка включительно функцию $f(x,y) = \frac{x}{1+y}$.
3. Исследуйте функцию $u = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$ на экстремум.
4. Исследуйте ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$.
5. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$.

На оценку «хорошо»

Билет 1

1. Найти $d^2u(x,y)$, заданной неявно уравнением:

$$x + y + u = e^u.$$

2. Разложите по формуле Тейлора до второго порядка включительно функцию $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ в окрестности точки $(2;\,2)$.
3. Исследуйте функцию на экстремум

$$u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x.$$

4. Исследуйте ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$.
5. Найдите интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{\sqrt{4n+1}}$.

Билет 2

1. Найдите $d^2u(x,y)$, заданной неявно уравнением:

$$e^{x+y+u} = eu.$$

2. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки $(0;\,2)$ до четвертого порядка включительно функцию $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

3. Исследуйте функцию на экстремум

$$u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2.$$

4. Исследуйте ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^n$.

5. Найдите интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2n+1}$.

На оценку «отлично»

Билет 1.

Исследуйте ряд: на сходимость:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \ln(1+n^2)}{\sqrt{n^3+3n+2}}$.

2. Преобразовать уравнение к полярным координатам, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $u = (x-6)^2 + (y+8)^2$ на множестве $x^2 + y^2 \le 25$.

4. Разложите в ряд Фурье функцию $y = |x|$ на отрезке $[-\pi;\,\pi]$. Нарисуйте сумму ряда Фурье.

5. Найдите область сходимости и область абсолютной сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (5 - x^2)^n.$$

Билет 1.

Исследуйте ряд на сходимость:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\sin n}{\sqrt{n}})$

2. Преобразуйте уравнение, принимая u и v за новые независимые переменные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^3, u = x, v = y + z.$$

3. Найдите условные экстремумы функции $u = xy + yz$ при заданных уравнениях связи $y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 2$, $y > 0$.

4. Исследуйте на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{nx} \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ на множестве $0 < x < +\infty$.

5. Разложите функцию $y = (1 - x^2)^{-3/2}$ в ряд Маклорена и найдите радиус полученного ряда.

На оценку «превосходно»

Билет

1. Исследуйте на экстремум непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x, y)$, заданную неявно условиями:

$$x^2 + y^2 + u^2 - 4x - 6y - 4u + 8,\ \ u > 2.$$

2. Преобразуйте уравнение, принимая u и v за новые независимые переменные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, u = x + z, v = y + z.$$

3. Разложите в ряд Фурье $y = \arcsin \sin x$.

4. Исследуйте на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2} \sin \frac{x}{n^2}$ на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (0; +\infty)$.

5. Разложите функцию $y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$ в ряд Маклорена и найдите радиус полученного ряда.

4 семестр

на оценку «удовлетворительно»

Билет 1.

1. Вычислите криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{\Gamma}(2x+y)ds$, где $\Gamma:\ y=2x$, $1\le x\le 4$.

2. Вычислите криволинейный интеграл II рода $\int\limits_{L} ydx+3xdy+z^2dz$, где $L:\begin{cases} z=x^2+y^2-1,\\ z=3.\end{cases}$
Кривая L ориентирована положительно относительно оси Oz.

3. Применив теорему Гаусса-Остроградского, вычислите интеграл $\int\int_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z\le 3$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

4. Найдите поток векторного поля $\overrightarrow{A}=x\overrightarrow{i}-(x+2y)\overrightarrow{j}+y\overrightarrow{k}$ через полную поверхность S, ограниченную $x^2+y^2=1$, $z=0$, $x+2y+3z=6$, и ориентированную внешним вектором нормали.

На оценку «хорошо»

Билет 2.

1. Вычислите криволинейный интеграл II рода $\int\limits_{L} ydx+x^2dy$, где $L:\ y=3x-1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x от 1 до 2.

2. Применив формулу Грина, вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$ по замкнутой кривой $\Gamma:\ x^2+y^2=1$, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева.

3. Вычислите поверхностный интеграл I рода $\int\int_S(x+y+z)ds$, где S – часть плоскости $x+2y+4z=4$, выделяемая условиями $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

4. Проверьте потенциальность поля $\overrightarrow{a}=y\overrightarrow{i}+x\overrightarrow{j}+e^z\overrightarrow{k}$ и найдите его потенциал.

На оценку «отлично»

Билет 3.

1. Используя интеграл Дирихле, вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}dx$.

2. Вычислить интеграл $\int\int\int\limits_D\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx\,dy\,dz$, где $G=\{x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma xyz\,ds$ по пространственной кривой Γ, где Γ – четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$, расположенная в первом октанте.

4. Докажите, что интеграл $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^\alpha}$ сходится равномерно на множестве $E=[3;+\infty)$.

5. Вычислите поверхностный интеграл $\int\int_S xyz\,dS$, где S – часть параболоида $z=x^2+y^2$, выделяемая условием $z\le 1$.

На оценку «превосходно»

Билет 4.

1. С помощью дифференцирования по параметру, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

2. Вычислить интеграл $\int\int\int\limits_D \frac{1}{(x+y)(x+y+z)} dx\,dy\,dz$, где $G = \{1 < x < 2,\ 1 < x+y < 3,\ 1 < x+y+z < 5\}$.

3. Используя формулу Стокса, вычислить интеграл $\int_\Gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz$, где Γ – граница треугольника с вершинами в точках $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(0; 0; a)$, ориентированная положительно относительно вектора $\{0; 1; 0\}$.

4. Исследовать интеграл $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$ на равномерную сходимость на множестве $E = (1; +\infty)$.

5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\int_G \frac{dx\,dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$, где $G = \{x^2 + y^2 > 4\}$.

5.3.6 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-3

1 семестр:

На оценку «удовлетворительно»

1. Найдите область определения функции $y = \arcsin(x-1)$.
2. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{x^2+1}$.
3. Для функции $y = -2x + 3$ найдите обратную.

На оценку «хорошо»

1. Дана функция $f(x) = x^2 + 5x + 6$. Найдите $f(\cos x)$.
2. Найдите вертикальные и наклонные асимптоты для графика функции $y = \frac{x^2+3}{x-1}$.
3. Постройте график функции $y = x + \sin x$.

На оценку «отлично»

1. Постройте график функции $y = x\sin x$.
2. Найдите точную верхнюю грань для последовательности $x_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, $n \geq 1$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = (x-3)e^{|x+1|}$, $-2 \leq x \leq 4$.

На оценку «превосходно»

1. Найдите обратную функцию для y=sin x, $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$.
2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:
$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$
3. Постройте график функции y=ln(tg x).

2 семестр:

На оценку удовлетворительно:

1. Найдите область определения функции $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.
2. Исследуйте функцию $y = (4x+8)^2e^x$ на монотонность.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y = \sin x$, $y = 0$, $0 < x < \pi$.

На оценку «хорошо»:

1. Вычислите интеграл $\int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$.
2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y = x^2$, $y = x + 2$.
3. Найдите длину кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $0 \leq x \leq 1$.
4. Найдите площадь одного лепестка лемнискаты Бернулли: $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$

На оценку «отлично»

1. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, y = x^3$.
2. Постройте график функции $y = xe^x$ с полным исследованием.
3. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох кривой $y^2 = 4x$, $0 \leq x \leq 3$.

На оценку «превосходно»:

1. Постройте график функции $= (x-3)e^{|x+1|}$, проведя полное исследование.
2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:
$x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 6x, \sqrt{3}y = x, \sqrt{3}x = y$.
3. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной кривыми: y=cos x^2, x=1, y=1.

3 семестр

На оценку "удовлетворительно"

1. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $u = xy - x$ на множестве $-1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$.

На оценку "хорошо"

1. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!}$.

2. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $u = xy + x + y$ на множестве $-1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$.

На оценку "отлично"

1. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{2^n n!}$.

2. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $u = xy - x$ на множестве $|x| \le 2$, $|y| \le 1$.

На оценку "превосходно"

1. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

2. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $u = x^2 + y^2 - 4x$ на множестве $-1 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$.

4 семестр

На оценку "удовлетворительно"

1. Найдите площадь области, ограниченной линиями $4y = x^2 - 4x$, $x = y + 3$.

2. Найдите работу поля $\overrightarrow{F} = \{0; -x^2\}$ вдоль дуги параболы $y^2 = 1 - x$ от точки $(1; 0)$ до точки $(0; 1)$.

На оценку "хорошо"

1. Найдите площадь области, ограниченной линиями $x + y = 1$, $x + y = 3$, $y = x$, $y = 4x$.

2. Найдите работу поля $\overrightarrow{F} = \{2xy; -y\}$ вдоль дуги кривой $y = x^2 - 1$ от точки $(1; 0)$ до точки $(2; 3)$.

На оценку "отлично"

1. Найдите площадь области, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$.

2. Найдите работу поля $\overrightarrow{F} = \{yx; zx; xy\}$ вдоль ломанной $ABCD$, где $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(2,3,1)$, $D(2,3,4)$.

На оценку "превосходно"

1. Найдите площадь области, ограниченной линиями $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2 \ge 1$.

2. Найдите работу поля $\overrightarrow{F} = \{2yx; y^2; -x^2\}$ вдоль кривой Γ: $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2a^2$, $y = x$ от точки $A(a, a, 0)$ до точки $B(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Умение решать задачи повышенной сложности
отлично	Умение решать задачи высокого уровня

Оценка	Критерии оценивания
очень хорошо	Умение решать задачи высокого уровня с незначительными замечаниями
хорошо	Умение решать задачи базового уровня
удовлетворительно	Умение решать задачи базового уровня с незначительными замечаниями
неудовлетворительно	При решении задач базового уровня допускает грубые ошибки
плохо	Нет навыков решения базовых задач

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Курс математического анализа : [учеб. для физ.-мат. и инженер.-физ. специальностей вузов] : в 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 1988. - 712 с. : ил. - ISBN 5-06-001290-5 (в пер.) : 1.60., 261 экз.
2. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Курс математического анализа : [учеб. для физ.-мат. и инженер.-физ. специальностей вузов] : в 3 т. Т. 3. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 1989. - 351, [1] с. : ил. - ISBN 5-06-000444-9, 5-06-00151 : 0.95., 171 экз.
3. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Курс математического анализа : учеб. для студентов физ.-мат. и инженер.-физ. специальностей вузов : в 3 т. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 1988-. Курс математического анализа. Т. 2. - 1988. - 575, [1] с. : ил. - ISBN 5-06-000444-9, 5-06-00145 (Т.2) : 1.40., 181 экз.
4. Зорич Владимир Анатольевич. Математический анализ : учеб. для студентов мат. и физ.-мат. фак. и специальностей вузов. - Изд. 5-е. - М. : Изд-во МЦНМО, 2007-. Математический анализ. Ч. 1. - М., 2007. - Изд. 5-е. - XVI, 664 с., 65 ил. - Библ.: 55 наз. - ISBN 5-94057-056-9 (ч. 1) : 335.00., 2 экз.
5. Зорич Владимир Анатольевич. Математический анализ : учеб. для студентов мат. и физ.-мат. фак. и специальностей вузов. - Изд. 5-е. - М. : Изд-во МЦНМО, 2007-. Математический анализ . Ч. 2. - М., 2007. - Изд. 5-е. - XIV, 794 с., 41 ил. - ISBN 5-94057-057-7 (ч. 2) : 397.00., 2 экз.

Дополнительная литература:

1. Ильин В. А. Основы математического анализа / В. А. Ильин. - 1967., 1 экз.
2. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Краткий курс математического анализа : учебник для студентов вузов : [в 2 т.]. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной. Ряды. - Висагинас : Альфа, 1998. - 400 с. - ISBN 9986-582-50-4 (т. 1). - ISBN 9986-582-51-2 : 21.85., 5 экз.
3. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Краткий курс математического анализа : учебник для студентов вузов : [в 2 т.]. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функции многих переменных.

Гармонический анализ. - Висагинас : Альфа, 1998. - 384 с. - ISBN 9986-582-52-0 (т. 2). - ISBN 9986-582-51-2 : 21.85., 5 экз.
4. Костромина Ольга Сергеевна. Теоретический минимум для успешного освоения дисциплины «Математический анализ» : учебно-методическое пособие. Ч. 1. Минимально необходимый уровень / О. С. Костромина, О. А. Кузенков ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2021. - 24 с. - Текст : электронный., https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=793981&idb=0.
5. Костромина Ольга Сергеевна. Теоретический минимум для успешного освоения дисциплины «Математический анализ» : учебно-методическое пособие. Ч. 2. Минимально необходимый уровень / О. С. Костромина, О. А. Кузенков ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2021. - 23 с. - Текст : электронный., https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=793983&idb=0.
6. Кузенков Олег Анатольевич. Дифференциальное исчисление функций одного переменного. Лекции : учебное пособие / О. А. Кузенков, Е. А. Рябова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2024. - 87 с. - Текст : электронный., https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=892588&idb=0.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

http://www.unn.ru/books/resources.html
http://new.e-vmk.unn.ru/sites

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Махрова Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.