

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Фракталы и хаос в динамических системах

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.01 - Математика

Направленность образовательной программы
Математика (общий профиль)

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.03.02 Фракталы и хаос в динамических системах относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
<i>ПК-6: Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию</i>	<i>ПК-6.1: Знает специфику научных обзоров ПК-6.2: Умеет составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию ПК-6.3: Владеет способностью по составлению научных обзоров, рефератов и отчетов по тематике проводимых исследований</i>	<i>ПК-6.1: Знать: Основные понятия теории динамических систем, и на базе этого может подготовить научный обзор. ПК-6.2: Уметь: Проводить исследования динамических систем, сочетая аналитические методы с численными результатами, полученными на компьютере и составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию ПК-6.3: Владеть: Математическим аппаратом динамических систем и способен составить научный обзор, реферат и отчет по тематике проводимых исследований</i>	<i>Задачи</i>	<i>Зачёт: Контрольные вопросы</i>

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	0
- КСР	1
самостоятельная работа	39
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	
Тема 1. Конструктивные фракталы	18	8		8	10
Тема 2. Динамические фракталы	31	15		15	16
Тема 3. Фракталы и хаос	22	9		9	13
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	32	0	33	39

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Конструктивные фракталы:

фракталы и системы счисления; самоподобие; фрактальная размерность; фракталы Кантора, Коха, Минковского, Серпинского; общая схема построения конструктивных фракталов; спирали, деревья, звезды; анализ конструктивных фракталов; системы итерированных функций (СИФ); случайность во фракталах.

Тема 2. Динамические фракталы:

модель ограниченного роста популяции; одномерные комплексные эндоморфизмы; множества Жулиа и Фату; фракталы Жулиа для квадратичных отображений и алгоритмы построения. Фрактал

Мандельброта, фракталы Ньютона.

Тема 3. Фракталы и хаос. Определение хаоса по Девани; примеры хаотических отображений; хаотическое поведение на аттракторе СИФ; хаос фракталов Жулия; странный аттрактор в отображении Эно.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Фракталы и хаос в ДС (МАТЕМАТИКА 3 к. 1 маг), <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6847>.

Иные учебно-методические материалы:

Используются учебные пособия:

А.Д. Морозов «Введение в теорию фракталов».- Изд-во ННГУ, Н.Новгород, 1999 (50 экз. в библиотеке ННГУ)

Р.М. Кроновер «Фракталы и хаос в динамических системах».-Изд-во Постмаркет, Москва, 2000. (13 экз. в библиотеке ННГУ).

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

Задача 1.

Построить фрактал Минковского.

Задача 2.

Построить фрактал Леви.

Задача 3.

Используя детерминированную СИФ, построить фрактал Серпинского.

Задача 4.

Используя детерминированную СИФ построить «лист папортника».

Задача 5.

Построить «ледовый квадрат».

Задача 6.

Построить фрактал Жулия.

Задача 7.

Построить фрактал Мандельброта.

Задача 8.

Построить фрактал Ньютона.

Задача 9.

Доказать хаотичность «тентового отображения».

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задачи выполнены верно или с незначительными ошибками
не зачтено	Задачи не выполнены или допущены грубые ошибки.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
		не зачтено		зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	знаний вследствие отказа обучающегося от ответа		много негрубых ошибок	подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	подготовки . Допущено несколько несущественных ошибок	подготовк и. Ошибок нет.	
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».

	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»
--	-------	---

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-6

Тема 1. Конструктивные фракталы.

1. Фракталы и системы счисления.
2. Размерность. Эксперимент Ричардсона. Степень изгиба кривой.
3. Фракталы и меандры (Коха, Минковского).
4. Общая схема построения конструктивных фракталов (примеры, фрактал Леви).
5. Анализ конструктивных фракталов (сжатие-поворот, отражение-сжатие).
6. Системы итерированных функций (СИФ) (основные понятия, пример – ковер Серпинского).
7. Теорема (без доказательства) о сходимости отображения Хатчинсона, понятие хаусдорфовой метрики.
8. Детерминированный и рандомизированный алгоритмы построения СИФ.

Тема 2. Динамические фракталы.

1. Модель ограниченного роста популяции.
2. Фракталы Жулиа.
3. Алгоритм построения фрактала Жулиа (теорема, на которой основан алгоритм).
4. Фрактал Мандельброта.
5. Алгоритм построения фрактала Мандельброта (теорема, на которой основан алгоритм).
6. Фракталы Ньютона.

Тема 3. Хаос в детерминированных системах.

1. Хаос по Девани. Примеры хаотического отображения.
2. Хаотичность отображения Жулиа на множестве Жулиа. Пример.: $f(z)=z^2-2$.
3. Хаос в отображении Эно.
4. Хаос в системе Лоренца
5. Формула Мельникова.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы на вопросы верны или допущены незначительные ошибки.
не зачтено	Ответов нет или допущены грубые ошибки.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Морозов Альберт Дмитриевич. Введение в теорию фракталов : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 1999. - 139 с. - 40.00., 50 экз.
2. Кроновер Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории : учеб. пособие для студ. по специальности 01.02 "Прикладная математика" / пер. с англ. Т. Э. Кренкеля, А. Л. Соловейчика ; под ред. Т. Э. Кренкеля. - М. : ПОСТМАРКЕТ, 2000. - 350, [1] с. : табл., графики, схемы. - 277.90., 11 экз.

Дополнительная литература:

1. Кроновер Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории : учеб. пособие для студ. по специальности 01.02 "Прикладная математика" / пер. с англ. Т. Э. Кренкеля, А. Л. Соловейчика ; под ред. Т. Э. Кренкеля. - М. : ПОСТМАРКЕТ, 2000. - 350, [1] с. : табл., графики, схемы. - 277.90., 11 экз.
2. Драгунов Тимофей Николаевич. Использование программы WInSet для визуализации динамических систем : учебное пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2007. - 102 с. - В надзаг.: Приоритетный нац. проект "Образование". Инновац. образоват. программа Нижегород. ун-та: Образовательно-научный центр "Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение". - ISBN 978-5-91326-010-9 : 15.00., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6847>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Морозов Альберт Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.