

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины
Современные методы математической физики

Уровень высшего образования
Магистратура

Направление подготовки / специальность
01.04.01 - Математика

Направленность образовательной программы
Фундаментальная математика и приложения

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.03 Современные методы математической физики относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1: Знать методы критического анализа проблемных ситуаций УК-1.2: Уметь вырабатывать стратегию действий при возникновении критических ситуаций УК-1.3: Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций	УК-1.1: Знает методы анализа и синтеза, принципы абстрактного мышления для исследования неклассических задач математической физики, возможные прикладные интерпретации дифференциальных уравнений с частными производными УК-1.2: Умеет вырабатывать стратегию действий при изучении методы анализа и синтеза для исследования классических задач математической физики. УК-1.3: Владеет опытом анализа абстрактных неклассических задач, применения анализа и синтеза для создания методов их решения, опытом постановки и исследования задач, возникающих при моделировании различных процессов и явлений, методами математической физики	Задачи	Экзамен: Контрольные вопросы Задачи
ОПК-2: Способен строить и анализировать математические	ОПК-2.1: Знает математические модели в современном	ОПК-2.1: Знает основные классы дифференциальных уравнений	Задачи	Экзамен: Контрольные

модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	естествознании, технике, экономике и управлении ОПК-2.2: Умеет модифицировать, анализировать и реализовывать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении ОПК-2.3: Владеет навыками модификации, анализа и реализации новых математических моделей в современном естествознании, технике, экономике и управлении	в частных производных, используемых в естественных науках, классические математические модели, применяемые в естественных науках ОПК-2.2: Умеет создавать новые математические модели, исследовать корректность этих моделей . ОПК-2.3: Владеет опытом создания новых математических моделей, опытом исследования корректности этих моделей		вопросы Задачи
--	---	---	--	-------------------

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	42
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора торные	Всего	

			работы), часы		
	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О
Тема 1. Основные уравнения математической физики	6	2	2	4	2
Тема 2. Элементы теории обобщенных функций	10	4	2	6	4
Тема 3. Обобщённые решения линейных дифференциальных уравнений и фундаментальные решения	6	2	2	4	2
Тема 4. Преобразование Фурье и его применение в задачах математической физики	12	6	2	8	4
Тема 5. Элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными	8	4	2	6	2
Тема 6. Элементы общей теории корректных задач	6	0	2	2	4
Тема 7. Вариационные методы и обобщенные решения краевых задач математической физики	14	6	4	10	4
Тема 8. Проблема собственных значений для краевых задач математической физики	12	4	4	8	4
Тема 9. Проекционные методы решения краевых задач математической физики. Метод Рунге	8	2	4	6	2
Тема 10. Проекционные методы решения смешанных задач математической физики. Метод Галеркина.	6	2	2	4	2
Тема 11. Основные краевые и смешанные задачи электромагнитной теории	6	0	2	2	4
Тема 12. Основные краевые и смешанные задачи теории упругости	6	0	2	2	4
Тема 13. Основные краевые и смешанные задачи гидродинамики	6	0	2	2	4
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	144	32	32	66	42

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Уравнения математической физики. Уравнение колебаний, уравнения диффузии и теплопроводности (стационарные и нестационарные). Стационарные задачи математической физики. Постановка основных задач для волнового уравнения, уравнения теплопроводности, эллиптических уравнений дивергентного вида.
2. Пробные и обобщённые функции. Полнота пространства обобщённых функций. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Линейная замена в обобщённых функциях. Дифференцирование обобщённых функций. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций. Регуляризация обобщённых функций.
3. Обобщённые решения линейных дифференциальных уравнений. Фундаментальные решения. Фундаментальные решения оператора теплопроводности, волнового оператора, оператора Лапласа, Гельмгольца. Фундаментальное решение оператора переноса.
4. Преобразование Фурье. Обобщённые функции медленного роста. Обобщённые функции с точечными носителями. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста. Свойства преобразования Фурье.
5. Элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений (L2-теория). Теорема существования решения произвольного линейного дифференциального уравнения с постоянными

коэффициентами. Корректные задачи.

6. Элементы общей теории корректных задач. Максимальный оператор и его свойства. Корректные сужения максимального оператора. Правильные корректные сужения. Общее расширение дифференциальной операции с пространства пробных функций.

7. Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида. Предварительные сведения из теории гильбертовых пространств. Пространства Соболева. Теорема о полноте пространств Соболева. Следы функций. Обобщённые формулировки основных краевых задач и вариационные принципы.

8. Задачи на собственные значения и собственные функции для основных краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида. Свойства разрешающего оператора вспомогательной задачи (ограниченность, самосопряжённость, вполне непрерывность). Применение теоремы Гильберта-Шмидта к задачам на собственные значения и собственные функции.

9. Проекционные методы решения краевых задач математической физики. Метод Рунге.

10. Проекционные методы решения смешанных задач математической физики. Обобщённые формулировки смешанных задач для параболических уравнений и теоремы о существовании и единственности решения. Метод Галеркина.

11. Формулировка основных задач для нестационарной системы уравнений Максвелла и для системы уравнений Максвелла в квазистационарных и стационарных приближениях. Энергетические неравенства и теоремы о существовании и единственности решений основных краевых задач для системы уравнений Максвелла в стационарном приближении.

12. Постановка основных краевых и смешанных задач теории упругости. Теоремы о существовании и единственности обобщённых решений для основных краевых задач.

13. Постановка основных краевых и смешанных задач гидродинамики. Теорема о существовании и единственности обобщённого решения задачи Стокса.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Современные методы математической физики (МАТЕМАТИКА 1 маг),
<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6429>.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1:

1. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей

$$1) \frac{1}{k} \varphi(x); \quad 2) \frac{1}{k} \varphi(kx); \quad 3) \frac{1}{k} \varphi\left(\frac{x}{k}\right);$$

$k = 1, 2, \dots$, сходящиеся в \mathcal{D} .

2. Вычислить предел в $\mathcal{D}'(R^1)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\frac{1}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}.$$

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

1. Найдите функцию, реализующую минимум функционала

$$\int_0^1 (v'^2 + v^2) dx + 2 \int_0^1 v dx$$

в классе $H_0^1(0,1)$.

2. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$I[y] = \int_0^1 (x^3 y''^2 + 100xy^2 - 20xy) dx; \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

Решение можно искать в виде $y(x) = (x-1)^2(\alpha + \beta x)$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задачи решены верно или с незначительными ошибками.
не зачтено	Задачи не решены или решены с грубыми ошибками.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			

атор достиж ения							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»

	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Пространство пробных функций.
2. Пространство обобщенных функций. Регулярные обобщенные функции.
3. Сингулярные обобщенные функции. δ -функция Дирака.
4. Дифференцирование обобщенных функций.
5. Пространства С.Л. Соболева.
6. Обобщенные (слабые) решения дифференциальных уравнений. Понятие фундаментального решения.
7. Пространство Шварца.
8. Преобразование Фурье.
9. Теорема Планшереля.
10. Теорема Лакса-Мильграма.
11. Метод Ритца для решения краевых задач.
12. Метод Галеркина для решения смешанных задач.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Постановка основных задач для волнового уравнения. Формулы Пуассона и Кирхгофа.
2. Постановка основных задач для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона.

3. Постановка основных задач для эллиптических уравнений дивергентного вида. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
4. Обобщённые решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений дивергентного вида. Теорема о существовании и единственности решения.
5. Обобщённые решения задачи Неймана для эллиптических уравнений дивергентного вида. Необходимые условия разрешимости.
6. Обобщённые решения задачи Ньютона для эллиптических уравнений дивергентного вида. Теорема о существовании и единственности решения.
7. Обобщенная задача на собственные значения и собственные функции задачи Дирихле для эллиптических уравнений дивергентного вида.
8. Обобщенная задача на собственные значения и собственные функции задачи Неймана для эллиптических уравнений дивергентного вида.
9. Обобщенная задача на собственные значения и собственные функции задачи Ньютона для эллиптических уравнений дивергентного вида.
10. Система уравнений Максвелла. Обобщенная постановка основных краевых задач.
11. Уравнения теории упругости. Обобщенная постановка основных краевых задач.
12. Обобщенная постановка задачи Стокса.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	знание основного и дополнительным материала без ошибок
отлично	знание основного материала без ошибок и погрешностей
очень хорошо	знание основного материала с незначительными погрешностями
хорошо	знание основного материалом с рядом заметных погрешностей
удовлетворительно	знание основного материала с рядом негрубых ошибок
неудовлетворительно	наличие грубых ошибок в основном материале
плохо	отсутствие знаний материала

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Найдите $\delta^{(m)}(x - x_0)$, $m \geq 1$.

2. Найдите производную функции

$$y = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Пусть в области $\Omega \subset R^n$ рассматривается задача

$$-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}u(x)) + q(x)u(x) = f(x), x \in \Omega; u(x) = 0, x \in \partial\Omega,$$

где $p \in C^1(\bar{\Omega})$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $x \in \Omega$, $q \in C(\bar{\Omega})$, $f \in L_2(\Omega)$. Сформулируйте обобщенную постановку задачи и соответствующую вариационную задачу.

2. Сформулируйте обобщенную проблему собственных значений для задачи Дирихле для оператора

$$Lu = -\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) + qu,$$

где $p \in C^1(\bar{\Omega})$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $x \in \Omega$, $q \in C(\bar{\Omega})$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Всестороннее владение навыками
отлично	Хорошее владение навыками
очень хорошо	Достаточное владение навыками
хорошо	Посредственное владение навыками
удовлетворительно	Минимальное владение навыками
неудовлетворительно	Отсутствие навыков
плохо	Полное отсутствие навыков

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

- Берс Липман. Уравнения с частными производными / пер. с англ. Ю. В. Егорова ; под ред. О. А. Олейник. - М. : Мир, 1966. - 351 с. : черт. - 1.51., 15 экз.

2. Жидков А. А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными : электронное учебно-методическое пособие / Жидков А. А., Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. - 82 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730395&idb=0>.
3. Калинин А. В. Введение в современные методы математической физики : учебное пособие / Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2014. - 120 с. - Рекомендовано учёным советом механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся в академической магистратуре по направлениям подготовки 01.04.01 «Математика», 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 01.04.03 «Механика и математическое моделирование». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Физика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729777&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Мизохата Сигэру. Теория уравнений с частными производными / пер. с яп. Ю. В. Егорова ; под ред. О. А. Олейник. - М. : Мир, 1977. - 504 с. - 2.30., 3 экз.
2. Дерендяев Николай Васильевич. Проекционный метод Фурье : учебно-методическое пособие / Н. В. Дерендяев, А. В. Калинин ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 75 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=851280&idb=0>.
3. Ладыженская Ольга Александровна. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1973. - 576 с. - На корешке загл.: Уравнения эллиптического типа. - 2.50., 2 экз.
4. Калинин Алексей Вячеславович. Пространства вектор-функций и стационарные задачи электромагнитной теории : учеб. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подгот. 01.04.01 Математика, 01.04.02 Прикладная математика и информатика, 01.04.03 Механика и мат. моделирование / А. В. Калинин, А. А. Тюхтина ; ННГУ. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2021. - 111 с. - ISBN 978-5-91326-646-0 : 175.50., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Фонд образовательных электрон. ресурсов ННГУ <http://www.unn.ru/books/resources>
2. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук, доцент
Тюхтина Алла Александровна, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.