

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
от 14.12.2021 г. протокол № 4

## **Рабочая программа дисциплины**

### **Алгебра и геометрия**

(наименование дисциплины (модуля))

### **Уровень высшего образования**

**бакалавриат**

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

### **Направление подготовки / специальность**

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

### **Направленность образовательной программы**

**Математическое моделирование и вычислительная математика**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

### **Форма обучения**

**очная**

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород

2022 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части.

Код дисциплины Б1.О.03 «Алгебра и геометрия»

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.03 «Алгебра и геометрия» относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика».

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения	
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	Знает базовые типы алгебраических объектов, основные методы линейной алгебры, аналитической геометрии, высшей алгебры, элементов абстрактной алгебры	Задачи
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	Умеет сводить алгебраические задачи к подсчету объектов базовых типов, выполнять преобразования в различных задачах линейной алгебры, аналитической геометрии, высшей алгебры, элементов абстрактной алгебры	Тест, задачи
	УК-1.3. Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.	Владеет опытом использования основных методов линейной алгебры, аналитической геометрии, высшей алгебры, элементов абстрактной алгебры	Задачи, контрольные работы
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знает основные понятия и результаты линейной алгебры, аналитической геометрии, высшей алгебры, элементов абстрактной алгебры	Тест, задачи
	ОПК-1.2. Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Умеет решать основные задачи линейной алгебры, аналитической геометрии, высшей алгебры, абстрактной алгебры	Тест, задачи
	ОПК-1.3. Имеет практический опыт применения фундаментальных знаний, полученных в области	Имеет практический опыт использования аппарата алгебры и геометрии при решении практических задач	Тест, задачи, контрольные работы

деятельности	математических и естественных наук в профессиональной деятельности		
--------------	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>18 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>648</b>
<b>в том числе</b>	
аудиторные занятия (контактная работа):	294
- занятия лекционного типа	128
- занятия семинарского типа	160
- текущий контроль (КСР)	6
самостоятельная работа	246
Промежуточная аттестация – экзамен	108

#### 1 семестр

	Очная форма обучения
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>7 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>252</b>
<b>в том числе</b>	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	48
- занятия семинарского типа	80
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	86
Промежуточная аттестация – экзамен	36

#### 2 семестр

	Очная форма обучения
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>6 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>216</b>
<b>в том числе</b>	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	48
- занятия семинарского типа	48
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	82
Промежуточная аттестация – экзамен	36

#### 3 семестр

	Очная форма обучения
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>5 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
<b>в том числе</b>	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	32
- текущий контроль (КСР)	2

самостоятельная работа	78
Промежуточная аттестация – экзамен	36

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Семестр	Часов				
		Всего	В том числе			
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
			занятия лекционн ые	Занятия семинарс кого типа	Всего	Самостоятельная работа обучающегося
<b>Целые числа.</b> Делимость. НОД. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Сравнимость целых чисел по заданному модулю. Классы вычетов*. Арифметика вычетов*.	1	17	6	4	10	7
<b>Комплексные числа.</b> Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Сопряженные числа. Неравенство треугольника. Формула Муавра, корни из единицы. Решение алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней**.	1	15	4	4	8	7
<b>Группы, кольца, поля*.</b> Понятие алгебраической операции. Полугруппа, группа. Симметрическая группа (группа подстановок), группа вычетов по заданному модулю. Кольцо. Поле. Примеры числовых колец и полей. Кольцо вычетов. Теорема: кольцо вычетов по модулю $n$ является полем тогда и только тогда, когда $n$ – простое. Понятие изоморфизма алгебраических систем.	1	16	6	3	9	7
<b>Кольцо многочленов над заданным кольцом (полем).</b> Делимость в кольце многочленов. НОД. Взаимно простые многочлены. Неприводимые многочлены над полем. Разложение многочлена на неприводимые. Производная многочлена. Выделение кратных множителей. Основная теорема алгебры над полем комплексных чисел (с доказательством**). Формулы Виета. Интерполяционный многочлен. Теорема Штурма**. Неприводимые многочлены над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ . Признак Эйзенштейна неприводимости над $\mathbb{Z}$ . Алгоритм Шуберта–Кронекера разложения многочлена на неприводимые множители над $\mathbb{Z}$ **.	1	19	6	7	13	6
<b>Кольцо матриц над заданным кольцом (полем).</b> Операции с матрицами. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса их решения. Его трудоемкость. Матричная интерпретация метода Гаусса. LU-разложение**. Эквивалентные матрицы. Скелетное разложение**. Обратная матрица.	1	14	5	7	7	7
<b>Векторы на плоскости и в пространстве.</b> Операции с векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная и аффинная системы координат. Деление отрезка в заданном отношении. Центр тяжести системы материальных точек. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.	1	16	2	7	9	7
<b>Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов.</b> Скалярное произведение геометрических векторов и его свойства. Выражение	1	16	3	7	10	6

скалярного произведения в прямоугольной и произвольной аффинной системе координат. Векторное произведение. Его свойства, выражение через координаты. Смешанное произведение. Определители 2-го и 3-го порядка, их геометрический смысл.						
<b>Линейное (векторное) пространство над полем.</b> Примеры: пространство геометрических векторов, пространство радиус-векторов, арифметическое пространство над полем $F$ , пространство матриц над полем $F$ , пространство многочленов. Простейшие следствия из аксиом. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Эквивалентные системы векторов. Теорема о замене. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Размерность и базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе. Изоморфизм линейных пространств. Понятие об аффинном пространстве.	1	19	6	7	13	6
<b>Теория систем линейных уравнений.</b> Теорема Кронекера–Капелли. Два способа задания линейного подпространства, фундаментальная система решений системы линейных уравнений. Множество решений системы линейных уравнений, два способа задания линейного многообразия.	1	15	2	7	9	6
<b>Прямые и плоскости.</b> Различные виды задания прямых и плоскостей, геометрический смысл коэффициентов. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Задачи на нахождение расстояний и углов между прямыми и плоскостями.	1	15	2	7	9	6
<b>Определитель (детерминант) матрицы и его свойства.</b> Теорема Лапласа. Три точки зрения на определители. Правило Крамера. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Теорема об умножении определителей. Формула Бине–Коши**.	1	18	2	7	9	9
<b>Суммы подпространств, базис и размерность суммы.</b> Прямая сумма.	1	15	2	7	9	6
<b>Изменение координат вектора при замене базиса и при аффинном преобразовании.</b>	1	14	2	6	8	6
<b>В т.ч. текущий контроль</b>		2			2	
<b>Промежуточная аттестация: экзамен</b>		36				
<b>Итого:</b>		<b>252</b>	<b>48</b>	<b>80</b>	<b>130</b>	<b>86</b>
<b>Линейные отображения</b> (операторы), действия с ними, их матрицы. Изменение матрицы линейного отображения при изменении базисов. Эквивалентные матрицы. Ядро, образ, ранг, дефект линейного отображения.	2	36	8	6	14	22
<b>Линейные преобразования</b> векторного пространства, подобие матриц. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и числа. Характеристический многочлен линейного преобразования. Выражение его коэффициентов через элементы матрицы. Теорема о существовании собственного вектора над полем комплексных чисел и ее вещественный аналог. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный аннулирующий многочлен преобразования (матрицы). Жорданова форма линейного преобразования (матрицы). Функции от линейных преобразований (от матриц)**.	2	42	10	12	22	20
<b>Билинейные и полуторалинейные функции</b> (формы) и их матрицы. Квадратичные функции. Изменение матрицы билинейной и полуторалинейной функции при изменении базиса. Конгруэнтные матрицы. Симметричные и эрмитовы функции. Теорема Лагранжа и Якоби о приведении симметричной и эрмитовой билинейной функции к каноническому виду. Разложение Холецкого**. Закон инерции. Критерий	2	49	15	15	30	19

Сильвестра положительной определенности.						
<b>Евклидовы и унитарные пространства.</b> Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Неравенство треугольника. Теорема Пифагора. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. Запись скалярного произведения через координаты в произвольном, ортогональном и ортонормированном базисах. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. QR-разложение матрицы**. Изоморфизм унитарных пространств. Нахождение псевдорешения несовместных систем линейных уравнений (метод наименьших квадратов). Геометрический смысл определителя. Неравенство Адамара.	2	51	15	15	30	21
<b>В т.ч. текущий контроль</b>		2			2	
<b>Промежуточная аттестация: экзамен</b>		36				
<b>Итого:</b>		<b>216</b>	<b>48</b>	<b>48</b>	<b>98</b>	<b>82</b>
<b>Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств.</b> Связь линейных преобразований и билинейных функций в унитарном пространстве. Сопряженное преобразование, свойства операции сопряжения. Нормальное преобразование унитарного пространства, существование у него базиса из собственных векторов. Комплексификация евклидова пространства. Теорема Шура. Теорема о нормальном преобразовании евклидова пространства. Унитарные и ортогональные преобразования. Сопряженные и симметричные преобразования. Неотрицательное самосопряженное преобразование, извлечение квадратного корня из него. Приведение квадратичной формы к главным осям и спектральное разложение симметрических матриц. Одновременное приведение пары квадратичных форм к каноническому виду**. Полярное и сингулярное разложения матриц**.	3	31	8	8	16	15
<b>Кривые и поверхности 2-го порядка.</b> Эллипс, гипербола, парабола. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Поверхности 2-го порядка. Аффинная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Взаимное расположение прямой и поверхности 2-го порядка. Центр, асимптотические направления, диаметральные плоскости. Ортогональная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Инварианты и полуинварианты.	3	32	8	8	16	16
<b>Группы.</b> Теорема Кэли. Циклические группы и их подгруппы. Разбиение группы на смежные классы, теорема Лагранжа. Нормальный делитель. Фактор-группа. Гомоморфизм групп. Связь нормальных делителей с гомоморфизмами.	3	33	8	8	16	17
<b>Кольца.</b> Идеалы в кольцах и их связь с гомоморфизмами.	3	25	5	5	10	15
<b>Поля.</b> Характеристика поля. Конечные поля, число элементов в них.	3	21	3	3	6	15
<b>В т.ч. текущий контроль</b>	3	2			2	
<b>Промежуточная аттестация: экзамен</b>		36				
<b>Итого</b>		<b>180</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>66</b>	<b>78</b>

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа,) коллоквиумах.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Алгебра и геометрия» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий и подготовку к экзамену. Для самоконтроля у студента имеется возможность удаленного тестирования по дистанционному лекционному курсу Золотых Н.Ю., Сидоров С.В. Алгебра и геометрия. Электронно-управляемый курс. 2017. <https://e-learning.unn.ru/>.

При выполнении самостоятельной работы студентам рекомендуется использовать конспекты лекций, а также рекомендуемую в п.6 литературу:

Основная литература: 1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2007. <https://e.lanbook.com/book/58162>; 2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2003. <https://e.lanbook.com/book/30198>; 3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2004. <https://e.lanbook.com/book/72575>.  
Дополнительная литература: 1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2007. <https://e.lanbook.com/book/2178>; 2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2007. <https://e.lanbook.com/book/2179>; 3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010. <https://e.lanbook.com/book/529>; 4. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2008. <https://e.lanbook.com/book/399>; 5. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. – СПб.: Лань, 2006. <https://e.lanbook.com/reader/book/165/>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

**5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:**

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие	При решении	Продемонстр	Продемонстри	Продемонстри	Продемонстр	Продемонстр

	минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	ированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	рованы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	рованы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	ированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	ированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
незачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

Экзамены в 1, 2, 3 семестрах

Превосходно	свободное владение основным материалом без ошибок и погрешностей
Отлично	свободное владение основным и дополнительным материалом с незначительными ошибками и погрешностями
Очень хорошо	достаточное владение основным материалом с незначительными погрешностями
Хорошо	владение основным материалом с рядом заметных погрешностей
Удовлетворительно	владение минимальным материалом, необходимым по данному предмету, с рядом ошибок
Неудовлетворительно	владение материалом недостаточно, необходима дополнительная подготовка. Работа за время семестра можно оценить как неудовлетворительную
Плохо	отсутствие владения материалом. Работа за время семестра была оценена на «плохо»

Оценка «неудовлетворительно» и «плохо» за экзамен ставится, если студент получил «неудовлетворительно» или «плохо» за работу во время семестра.

Оценки «превосходно», «отлично», «очень хорошо», «хорошо», «удовлетворительно» считаются положительными.

### Критерий оценивания результатов тестирования

Баллы, %	Оценка сформированности компетенций
99-100	Превосходно
91-98	Отлично
86-90	Очень хорошо
71-85	Хорошо
51-70	Удовлетворительно
31-50	Неудовлетворительно
0-30	Плохо

### Критерии оценок выполнения контрольных работ (каждая задача оценивается в 2 балла)

Решена полностью	2
Решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами	1,5
Решена задача наполовину	1
Сделан первый этап в решении задачи	0,5
Нет решения	0

### Суммарная оценка выполнения контрольной работы из 5 задач

Количество баллов	Оценка
10	Отлично
9,5	Очень хорошо
9	Хорошо
8,5	Удовлетворительно
5	Неудовлетворительно
0-2	Плохо

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1 Контрольные вопросы

вопросы	Код формируемой компетенции
1 семестр	
1. Целые числа. Делимость. НОД. Алгоритм Евклида. Линейное разложение НОД.	ОПК-1
2. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики.	ОПК-1
3. Сравнимость целых чисел по заданному модулю. Классы вычетов (сравнений). Арифметика вычетов.	ОПК-1
4. Комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Сопряженные числа. Неравенство треугольника. Формула Муавра, корни из единицы	ОПК-1
5. Группы, кольца, поля. Понятие алгебраической операции. Полугруппа, группа. Симметрическая группа (группа подстановок), группа вычетов по заданному модулю.	ОПК-1
6. Кольцо. Поле. Примеры числовых колец и полей. Кольцо вычетов. Теорема: кольцо вычетов по модулю $n$ является полем тогда и только тогда, когда $n$ – простое. Понятие изоморфизма алгебраических систем.	ОПК-1
7. Кольцо многочленов над заданным кольцом (полем). Делимость в кольце многочленов. НОД. Взаимно простые многочлены.	ОПК-1
8. Неприводимые многочлены над полем. Разложение многочлена на неприводимые. Производная многочлена. Выделение кратных множителей.	ОПК-1
9. Основная теорема алгебры над полем комплексных чисел. Формулы Виета.	ОПК-1
10. Интерполяционный многочлен.	ОПК-1
11. Теорема Штурма.	ОПК-1
12. Неприводимые многочлены над кольцом целых и полем рациональных чисел. Признак Эйзенштейна неприводимости. Алгоритм Шуберта–Кронекера разложения многочлена на неприводимые множители.	ОПК-1
13. Кольцо матриц над заданным кольцом (полем).	ОПК-1
14. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса их решения, его трудоемкость, оценка числа операций. Матричная интерпретация метода Гаусса. LU-разложение. Эквивалентные матрицы.	ОПК-1
15. Обратная матрица.	ОПК-1
16. Векторы на плоскости и в пространстве. Операции с векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная и аффинная системы координат.	ОПК-1
17. Деление отрезка в заданном отношении.	ОПК-1
18. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.	ОПК-1
19. Скалярное произведение геометрических векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения в прямоугольной и произвольной аффинной системе координат.	ОПК-1
20. Векторное произведение. Его свойства, выражение через координаты.	ОПК-1
21. Смешанное произведение.	ОПК-1
22. Определители 2-го и 3-го порядка, их геометрический смысл.	ОПК-1
23. Линейное (векторное) пространство над полем. Примеры: пространство геометрических векторов, пространство радиус-векторов, арифметическое пространство над полем $F$ , пространство матриц над полем $F$ , пространство многочленов. Простейшие следствия из аксиом.	ОПК-1
24. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Эквивалентные системы векторов. Теорема о замене.	ОПК-1
25. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Размерность и базис линейного пространства.	ОПК-1
26. Координаты вектора в базисе. Изоморфизм линейных пространств.	ОПК-1
27. Теория систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Множество решений системы линейных уравнений, два способа задания линейного многообразия.	ОПК-1
28. Два способа задания линейного подпространства, фундаментальная система решений системы линейных уравнений.	ОПК-1
29. Различные виды задания прямых и плоскостей, геометрический смысл коэффициентов.	ОПК-1
30. Взаимное расположение прямых и плоскостей.	ОПК-1
31. Нахождение расстояний и углов между прямыми и плоскостями.	ОПК-1

32.	Определитель (детерминант) матрицы и его свойства.	ОПК-1
33.	Теорема Лапласа. Три точки зрения на определители.	ОПК-1
34.	Правило Крамера. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.	ОПК-1
35.	Формула Бине–Коши.	ОПК-1
36.	Суммы подпространств, базис и размерность суммы. Прямая сумма.	ОПК-1
37.	Изменение координат вектора при замене базиса и при аффинном преобразовании.	ОПК-1
2 семестр		
1.	Линейные отображения (операторы), действия с ними, их матрицы.	ОПК-1
2.	Изменение матрицы линейного отображения при изменении базисов. Эквивалентные матрицы.	ОПК-1
3.	Ядро, образ, ранг, дефект линейного отображения.	ОПК-1
4.	Линейные преобразования векторного пространства, подобие матриц. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и числа.	ОПК-1
5.	Характеристический многочлен линейного преобразования. Выражение его коэффициентов через элементы матрицы.	ОПК-1
6.	Теорема о существовании собственного вектора над полем комплексных чисел и ее вещественный аналог. Теорема Гамильтона–Кэли.	ОПК-1
7.	Минимальный аннулирующий многочлен преобразования (матрицы).	ОПК-1
8.	Жорданова форма линейного преобразования (матрицы).	ОПК-1
9.	Функции от линейных преобразований (от матриц).	ОПК-1
10.	Билинейные (полуторалинейные) и квадратичные функции (формы) и их матрицы. Изменение матрицы квадратичной (полуторалинейной) функции при изменении базиса.	ОПК-1
11.	Теорема Лагранжа и Якоби о приведении симметричной (эрмитовой) билинейной формы к каноническому виду. Разложение Холецкого.	ОПК-1
12.	Закон инерции.	ОПК-1
13.	Критерий Сильвестра положительной определенности, связь со скалярным произведением.	ОПК-1
14.	Евклидово (унитарное) пространство. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.	ОПК-1
15.	Неравенство треугольника.	ОПК-1
16.	Теорема Пифагора. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов.	ОПК-1
17.	Запись скалярного произведения через координаты в произвольном, ортогональном и ортонормированном базисах.	ОПК-1
18.	Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. QR-разложение матрицы.	ОПК-1
19.	Изоморфизм унитарных пространств.	ОПК-1
20.	Нахождение псевдорешения несовместных систем линейных уравнений (метод наименьших квадратов).	ОПК-1
21.	Геометрический смысл определителя. Неравенство Адамара.	ОПК-1
3 семестр		
1.	Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств. Связь линейных преобразований и билинейных функций в унитарном пространстве. Сопряженное преобразование, свойства операции сопряжения.	ОПК-1
2.	Нормальное преобразование унитарного пространства, существование у него базиса из собственных векторов.	ОПК-1
3.	Комплексификация евклидова пространства. Теорема о нормальном преобразовании евклидова пространства.	ОПК-1
4.	Унитарные и ортогональные преобразования.	ОПК-1
5.	Сопряженные и симметричные преобразования.	ОПК-1
6.	Неотрицательное самосопряженное преобразование, извлечение квадратного корня из него.	ОПК-1
7.	Приведение квадратичной формы к главным осям.	ОПК-1
8.	Одновременное приведение пары квадратичных форм к каноническому виду.	ОПК-1
9.	Полярное и сингулярное разложения матриц.	ОПК-1
10.	Кривые и поверхности 2-го порядка. Аффинная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка.	ОПК-1
11.	Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Центр, асимптотические направления, диаметральные плоскости.	ОПК-1

12.	Взаимное расположение прямой и поверхности 2-го порядка.	ОПК-1
13.	Ортогональная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Инварианты и полуинварианты.	ОПК-1
14.	Группы. Теорема Кэли.	ОПК-1
15.	Циклические группы и их подгруппы.	ОПК-1
16.	Разбиение группы на смежные классы, теорема Лагранжа.	ОПК-1
17.	Нормальный делитель. Фактор-группа. Гомоморфизм групп.	ОПК-1
18.	Связь нормальных делителей с гомоморфизмами.	ОПК-1
19.	Кольца. Идеалы в кольцах и их связь с гомоморфизмами.	ОПК-1
20.	Поля. Характеристика поля. Конечные поля, число элементов в них.	ОПК-1

### 5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции УК-1 (1 семестр)

1. Являются ли следующие векторы линейно независимыми  $\mathbf{a}(1,1,1), \mathbf{b}(1,1,2), \mathbf{c}(1,2,3)$   
(Ответ: да)
2. Являются ли следующие векторы линейно независимыми  $\mathbf{a}(2,1,-3), \mathbf{b}(3,2,-5), \mathbf{c}(1,-1,1)$   
(Ответ: да)
3. Даны три вектора  $\mathbf{a}(6, 5)$ ,  $\mathbf{b}(3, 4)$  и  $\mathbf{c}(5, 7)$ . Подобрать числа  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы векторы  $\alpha\mathbf{a}$ ,  $\beta\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  образовали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего. (Ответ:  $\alpha=1/9$ ,  $\beta=-17/9$ )

#### Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции ОПК-1

### (1 семестр)

1. Сколько инверсий содержит перестановка (3, 5, 2, 6, 1, 4)?  
1) 6  
2) 7  
3) 8 (+)
2. Расстояние от точки  $(x_0, y_0, z_0)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  (система координат прямоугольная) равно:  
1)  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2}$   
2)  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$  (+)  
3)  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}}$
3. С каким знаком входит в полное разложение определителя 5-го порядка член  $a_{24}a_{43}a_{15}a_{51}a_{32}$   
1) Со знаком «+»  
2) Со знаком «-» (+)  
3) Не входит

### 5.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции УК-1 Контрольная работа №1 1-го семестра

#### Вариант № 1

1. Вычислить  $\frac{(2-i)^2(1+3i)}{3-2i}$ .

2. Представить в тригонометрической форме и изобразить на плоскости число  $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$ .
3. Решить уравнение  $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - i = 0$ .
4. Решить систему уравнений  $\begin{cases} (1-i)a - 3ib = -4 - 3i, \\ 2a - (3+3i)b = 11 - i. \end{cases}$  в комплексных числах.
5. Вычислить  $\sqrt[4]{16 - 16\sqrt{3}i}$ .

### Контрольная работа №21-го семестра

#### Вариант № 1

1. Разложить многочлен  $2x^4 - x^3 + 5x - 3$  по степеням  $x+1$ .
2. Найти наибольший общий делитель и коэффициенты Безу для многочленов  $x^2 - x + 3$  и  $x^2 + x + 1$ .
3. Найти интерполяционный многочлен в форме Лагранжа по таблице интерполяции

X	0	1	2	3
Y	-1	-1	1	11

4. Найти все рациональные корни многочлена  $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$  и определить их кратности.
5. Многочлен  $x^6 - 9x^2$  разложить на неприводимые множители над полями  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ .

### Контрольная работа №31-го семестра

#### Вариант № 1

1. Вычислить произведение матриц  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Найти общее решение системы линейных уравнений  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$

3. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ .

4. Найти обратную для матрицы  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

### Контрольная работа №41-го семестра

#### ВАРИАНТ 1

1. Имеются ли среди векторов  $\mathbf{a} = (2, -3, 8)$ ,  $\mathbf{b} = (4, 0, -1)$ ,  $\mathbf{c} = (-0,2; 0,3; -0,8)$  перпендикулярные? Параллельные?
2. При каких  $a$  прямые  $ax - 4y = 6$  и  $x - ay = 3$  имеют только одну общую точку?
3. Найти ортогональную проекцию точки  $(5, 2, -3)$  на плоскость  $3x - 4y + z = 30$

### Контрольная работа №51-го семестра

#### ВАРИАНТ 1

1. В ортонормированном базисе даны вектора:  $\mathbf{a} (-1, -2)$ ,  $\mathbf{b} (-2, -3)$  и  $\mathbf{c} (2, 1)$ . Вычислить  $b^2(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - c^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .
2. Найти вектор длины 4, ортогональный векторам  $(-1, 2, 1)$  и  $(2, 3, 4)$ .
3. Найти площадь треугольника с вершинами  $(2, -1, 0)$ ,  $(1, 2, -1)$ ,  $(-2, 3, 4)$ .

### Контрольная работа №6 1-го семестра

#### Вариант № 1

1. Проверить на линейную зависимость систему векторов

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек  $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  и  $L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ , где

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. При каких значениях параметра вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  принадлежит линейной оболочке векторов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}?$$

## Контрольная работа №12-го семестра

### Вариант № 1

1. В пространстве  $R^3$  задано линейное преобразование  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_3 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу этого преобразования в стандартном базисе и базисе  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

2. Линейное преобразование задано своей матрицей  $\begin{pmatrix} 6 & 12 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Найти все собственные числа. Для каждого из них указать его алгебраическую и геометрическую кратности.

Выяснить, диагонализируемо ли преобразование

а) в вещественном пространстве; б) в комплексном пространстве.

Если да, то записать матрицу перехода к базису из собственных векторов и матрицу преобразования в этом базисе.

## Контрольная работа №2 2-го семестра

### Вариант № 1

1. Применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортогональный базис в

линейной оболочке системы векторов  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ .

2. Найти проекцию и перпендикуляр вектора  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  на линейную оболочку векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

3. Найти псевдорешения системы  $\begin{cases} 2a + 3b - c = 2, \\ -a + 2b - 3c = 0, \\ -3a - b - 2c = -1. \end{cases}$

## Контрольная работа №13-го семестра

### Вариант № 1

1. Квадратичную форму  $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$  привести к каноническому виду матричным методом, методом Лагранжа выделения полных квадратов и с помощью теоремы Якоби.

2. Квадратичную форму  $3x^2 + 4xy + 3y^2$  привести к главным осям.

## Контрольная работа №2 3-го семестра

### Вариант № 1

1. Аффинным преобразованием привести уравнение поверхности к каноническому виду:  
 $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 2y + 2z = 0$ .

2. Найти каноническую систему координат и построить кривую второго порядка  $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$ .

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) Основная литература:

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2007. <https://e.lanbook.com/book/48199#authors>
2. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс]: учеб. — Электрон.дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 432 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>
3. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс]: учеб.пособие / Л.А. Беклемишева [и др.]. — Электрон.дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2017. — 496 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/97281>
4. Золотых Н.Ю., Сидоров С.В. Алгебра и геометрия. Электронно-управляемый курс. 2017. <https://e-learning.unn.ru/>

### б) Дополнительная литература

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2007. <https://e.lanbook.com/book/2178>
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2007. <https://e.lanbook.com/book/2179>
3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010. <https://e.lanbook.com/book/529>
4. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2008. <https://e.lanbook.com/book/399>
5. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. – СПб.: Лань, 2006. <https://e.lanbook.com/book/165#authors>

### в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

<http://www.unn.ru/books/resources.html>

<http://e-learning.unn.ru/>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной

техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор д.ф.-м.н., доц. \_\_\_\_\_ Золотых Н.Ю.

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_

Зав кафедрой АГиДМ, д.ф.м.н., проф. \_\_\_\_\_ Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 01.12.2021 года, протокол № 2.