

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Модели механики деформируемого твердого тела

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование и вычислительная математика

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.05.01 Модели механики деформируемого твердого тела относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-6: Способен изучать и применять программное обеспечение, проводить расчётные работы и выполнять обработку результатов исследований	ПК-6.1: Знает методы применения современных программных комплексов, пакетов прикладных программ и автоматизированных систем для решения прикладных задач при проведении исследований ПК-6.2: Умеет самостоятельно проводить расчётные работы, выбирать и применять современные программные комплексы, пакеты прикладных программ и автоматизированные системы, обрабатывать и анализировать полученные результаты ПК-6.3: Имеет практический опыт применения современного программного обеспечения для решения прикладных задач	ПК-6.1: Знать методы применения современных программных комплексов, пакетов прикладных программ и специализированные разделы механики сплошных сред и смежных дисциплин, необходимые при создании моделей физико-механических процессов  ПК-6.2: Уметь самостоятельно проводить расчётные работы, выбирать и применять современные программные комплексы, создавать новые и модернизировать известные модели реальных тел и физических процессов обрабатывать и анализировать полученные результаты  ПК-6.3: Владеть опытом применения создания и исследования математических моделей в естественных науках	Контрольная работа Собеседование	Экзамен: Контрольные вопросы Задания

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>5</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>32</b>
- КСР	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>94</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Введение	13	1		1	12
Тензоры в механике сплошных сред	31	4	8	12	19
Кинематика сплошных сред	20	3	6	9	11
Законы механики сплошных сред	24	3	6	9	15
Основные модели сплошных сред	18	2	4	6	12
Постановки математических задач механики сплошных сред	16	1	4	5	11
Инженерные методы расчета конструкций на прочность	20	2	4	6	14
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	180	16	32	50	94

#### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Введение Математическое моделирование механики деформируемых сред. Математическое описание деформируемых сред с помощью уравнений в частных производных. Аксиоматика механики сплошных сред: постулаты ньютоновой механики, гипотеза сплошности, принцип объективности.
2. Тензоры в механике сплошных сред Объективность физических величин. Тензоры в евклидовом

пространстве. Тензоры нулевого ранга – скаляры. Тензоры 1-го ранга – векторы (определение, системы координат, скалярное, векторное, смешанное умножение векторов, координаты вектора, формулы векторной алгебры). Тензоры 2-го ранга (определения, алгебраические операции: свойства и характеристики: след, векторный инвариант, определитель, единичный, обратный, взаимный, симметричный, антисимметричный, шаровой, девиатор, ортогональный, положительно определённый, собственные числа и собственные векторы, координаты тензора, преобразование координат, тензор Леви-Чивиты, символы Кронекера. Тензорные поля. Ковариантное дифференцирование.

3. Кинематика сплошных сред Лагранжевы и эйлеровы способы описания движения деформируемых сред. Лагранжевы и эйлеровы координаты. Материальное дифференцирование в эйлеровых координатах. Меры деформации. Лагранжевы и эйлеровы тензоры деформаций. Тензор малых деформаций, свойства и физический смысл параметров тензора малых деформаций.

4. Законы механики сплошных сред Силы в механике сплошных сред. Тензор напряжений. Законы сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии. Уравнения неразрывности, движения, энергии. Симметричность тензора напряжений. Система уравнений механики сплошных сред. Элементы термодинамики. Уравнения состояния.

5. Основные модели сплошных сред Определяющие уравнения. Модели идеальной жидкости (газа), линейной теории упругости, вязкой жидкости, термоупругости. Закон Гука. Число констант в законе Гука. Изотропные и анизотропные среды. Экспериментальное определение констант в законе Гука. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, константы Ламе. Системы уравнений Эйлера, Ламе и Навье-Стокса. Волны в упругих средах.

6. Постановки математических задач механики сплошных сред Задачи статики и динамики сплошных сред. Граничные условия. Начальные условия. Вариационные постановки задач.

7. Инженерные методы расчета конструкций на прочность Расчет стержневых систем. Принципы и гипотезы сопротивления материалов. Построение эпюр усилий и моментов в стержнях. Геометрические характеристики плоских сечений. Расчет стержней при растяжении, сжатии, кручении, изгибе.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен).

Дополнительная литература:

1. Седов Л.И. Механика сплошных сред//М.: Наука, Т.1,2, 1976. 90 экз.

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

#### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

##### Задание 1

В системе координат  $(x^1, x^2, x^3)$  метрический тензор  $g_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -0.5 \\ 1 & 4 & -1 \\ -0.5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ . Даны вектор  $b_i = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  и тензор  $T^{ij} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ . Найти  $b_i, b^i, T^{ij}, T_{ij}$  в системе координат  $y^1 = x^1 + 2x^2 + 3x^3$   
 $y^2 = 2x^1 + 2x^2 - x^3$   
 $y^3 = x^1 + x^2 + x^3$ .

##### Задание 2

В криволинейной системе координат  $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$  определить: основной и взаимный базис, метрический тензор, ковариантную производную векторного поля  $b_i = (\alpha^1 \sin \alpha^3, \alpha^2 / \alpha^1, (\alpha^3)^2 - \alpha^2)$ .

$$\begin{aligned} x^1 &= \alpha^1 \alpha^2 + 3\alpha^3 \\ x^2 &= -2\alpha^3 + 2\alpha^1 \sin \alpha^2 \\ x^3 &= \cos \alpha^1 + \alpha^2 - \alpha^3 \end{aligned}$$

##### Задание 3

Найти собственные значения и собственные векторы тензора  $T_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -0.5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -0.5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя

Оценка	Критерии оценивания
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

1. Понятие сплошной среды.
2. Формулы дифференцирования сложной функции
3. Принцип суммирования. Символ Кронекера. Дискриминантные тензоры.
4. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Основной и взаимный базисы.
5. Полиадики.
6. Фундаментальные метрические тензоры.
7. Ковариантное дифференцирование . Символы Кристоффеля 2 рода
8. Физические компоненты тензора.
9. Симметричный тензор 2-го ранга. Собственные значения, собственные векторы, инварианты
10. Лагранжевы и Эйлеровы координат. Линии тока и траектории
11. Тензор малых деформаций. Физический смысл компонент тензора малых деформаций.
12. Условия совместности деформаций.
13. Вектор напряжений.
14. Тензор напряжений Коши.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три незначительные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				

достижения							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»

	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-6

1. Основные гипотезы МСС. Понятие сплошной среды. Применимость модели сплошной среды.
2. Формулы дифференцирования сложной функции (скалярной, векторной, от скалярного и векторного аргумента)
3. Тензорные обозначения. Принцип суммирования. Символ Кронекера. Дискриминантные тензоры.
4. Преобразование базисов и координат. Матрица перехода и матрица преобразования. Ортогональный базис.
5. Ковариантные и контрвариантные компоненты вектора. Основной и взаимный базисы.
6. Понятие тензора. Закон преобразования координат. Полиадики.
7. Алгебраические операции с тензорами (сложение, умножение, свертка, симметрирование, альтернирование).
8. Фундаментальные метрические тензоры. Операция жонглирования индексами.
9. Ковариантное дифференцирование векторов и тензоров.
10. Формулы для вычисления символов Кристоффеля 2 рода.
11. Ортогональные криволинейные системы координат. Физические компоненты тензора.
12. Коэффициенты Ламе.  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{rot}$  и оператор Лапласа в криволинейных ортогональных координатах.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки.



Оценка	Критерии оценивания
	Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-6

- В системе координат  $(x^1, x^2, x^3)$  метрический тензор  $g_{ij} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ . Дан тензор  $T^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -8 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Найти  $T_{ij}$  в системе координат  $y^1 = x^1 - 2x^2 + x^3$   
 $y^2 = 2x^1 + x^2 - x^3$   
 $y^3 = x^1 - x^2 + x^3$
- В криволинейной системе координат  $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$  определить: основной и взаимный базис, метрический тензор, ковариантную производную векторного поля  $b^i = (\alpha^3 \cos \alpha^1, \alpha^1 / \alpha^2, 2(\alpha^2)^2 + \alpha^1 \alpha^3)$ .  
 $x^1 = 2\alpha^2 \alpha^3 - \alpha^1$   
 $x^2 = \alpha^1 \cos \alpha^3 + \alpha^2$   
 $x^3 = e^{\alpha^1} + \alpha^2 - \alpha^3$
- Какой вид имеют массовые силы, если при распределении напряжений  $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3x_1 x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 2x_1 & 0 \end{bmatrix}$  среда находится в равновесии?

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Ильюшин Алексей Антонович. Механика сплошной среды : [учеб. для ун-тов по специальности "Механика"]. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Изд-во МГУ, 1990. - 310 с. : ил. - ISBN 5-211-00940-1 : 0.95., 3 экз.
2. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / пер. с англ. Е. И. Свешниковой ; под ред. М. Э. Эглит. - М. : Мир, 1974. - 318 с. - 1.50., 12 экз.

Дополнительная литература:

1. Победря Борис Ефимович. Лекции по тензорному анализу : [учеб. пособие для вузов по специальности "Механика"]. - 3-е изд., доп. - М. : Изд-во МГУ, 1986. - 262, [1] с : ил. - 0.60., 14 экз.
2. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред / пер. с англ. В. И. Контовта ; под ред. В. В. Лохина. - М. : Наука, 1971. - 374 с. : черт. - (Физико-математическая библиотека инженера). - 1.79., 2 экз.
3. Морозов Никита Федорович. Лекции по избранным вопросам механики сплошных сред / ЛГУ им. А. А. Жданова. - Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. - 91 с. : граф. - 0.20., 3 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Не требуется

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран)

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Чекмарев Дмитрий Тимофеевич, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.