

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.
Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины (модуля)

**Дополнительные главы теории
обыкновенных дифференциальных уравнений**

Уровень высшего образования
магистратура

Направление подготовки (специальность)

01.04.01 Математика

Направленность/профиль подготовки (специализация)

Фундаментальная математика и приложения

Форма обучения

очная

Нижний Новгород

2023 г.

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений» относится к обязательной части ОПОП магистратуры по направлению 01.04.01 - Математика, изучается в 1 семестре на 1 году обучения. Индекс дисциплины – **Б1.О.04**.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции) | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции | | Наименование оценочного средства |
|---|---|--|----------------------------------|
| | Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора) | Результаты обучения по дисциплине** | |
| УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | УК-1.1. Знать методы критического анализа проблемных ситуаций. | <u>Знать</u> основные понятия дисциплины «Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений», определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений. | Собеседование |
| | УК-1.2. Уметь вырабатывать стратегию действий при возникновении критических ситуаций. | <u>Уметь</u> решать задачи вычислительного и теоретического характера в области дифференциальных уравнений. | Задача |
| | УК-1.3. Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций. | <u>Владеть</u> математическим аппаратом дифференциальных уравнений, методами решения задач и доказательств утверждений в этой области. | Собеседование |
| ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики | ОПК-1.1 . Знать основы фундаментальных дисциплин в области математических и (или) естественных наук. | <u>Знать:</u> - основные понятия и определения; - основные теоремы существования и единственности решения; - теоремы о свойствах решений линейных дифференциальных уравнений и систем; - теоремы о представлении решений дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами; - утверждения об устойчивости решений и поведении траекторий вблизи положений равновесия; - основы метода нормальной формы и его приложений к исследованию локального поведения системы ДУ в окрестности с.р. и периодической траектории. | Собеседование |
| | ОПК-1.2. Уметь выбирать | <u>Уметь:</u> - решать основные типы дифференциальных | Задача |

| | | | |
|--|---|---|---------------|
| | методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний. | уравнений первого порядка; - решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами; - исследовать устойчивость решений; - строить траектории на фазовой плоскости; - решать уравнения в частных производных первого порядка. | |
| | ОПК-1.3. Владеть навыками применения фундаментальных знаний в профессиональной деятельности. | <u>Владеть:</u> - навыками решения и анализа основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений; - техникой линеаризации, основными понятиями дифференциальной топологии. | Собеседование |

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

| | Очная форма обучения |
|---|----------------------|
| Общая трудоемкость | 5 ЗЕТ |
| Часов по учебному плану | 180 |
| в том числе | |
| аудиторные занятия (контактная работа): | 102 |
| - занятия лекционного типа | 32 |
| - занятия семинарского типа | 32 |
| - КСРИФ | 2 |
| - текущий контроль (КСР) | 36 |
| самостоятельная работа | 78 |
| Промежуточная аттестация – экзамен/зачет | экзамен |

3.2. Содержание дисциплины

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины | Всего (часы) | В том числе | | | | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
|--|--------------|---|---------------------------|----------------------------|-------|---|
| | | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них | | | | |
| | | Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Занятия лабораторного типа | Всего | |
| 1. Теория Флоке-Ляпунова для систем ЛДУ с периодическими коэффициентами. Параметрический резонанс. | 11 | 2 | 2 | | 4 | 7 |

| | | | | | | |
|--|------------|-----------|-----------|--|-----------|-----------|
| 2. Локальные задачи: поведение системы в окрестности состояния равновесия и периодической траектории. Примеры. | 11 | 2 | 2 | | 4 | 7 |
| 3. Метод нормальной формы для окрестности состояния равновесия. Гомологическое уравнение и резонансы. Примеры нормальных форм. | 20 | 6 | 6 | | 12 | 8 |
| 4. Метод нормальной формы для окрестности периодической траектории. | 16 | 4 | 4 | | 8 | 8 |
| 5. Метод нормальной формы и простейшие локальные бифуркации. Применение к системам специального типа (гамильтоновым, обратимым) | 15 | 2 | 2 | | 4 | 11 |
| 6. Координатное представление для гамильтоновых систем, основные свойства, системы с одной степенью свободы. | 17 | 4 | 4 | | 8 | 9 |
| 7. Гамильтоновы системы с полутора степенями свободы и симплектические диффеоморфизмы плоскости. Интегрируемые системы, неподвижные точки симплектических диффеоморфизмов. | 19 | 4 | 4 | | 8 | 11 |
| 8. Теорема Пуанкаре-Ляпунова, окрестность резонансной кривой при возмущении. | 17 | 4 | 4 | | 8 | 9 |
| 9. Линейные гамильтоновы системы, спектр, нормальная форма квадратичного гамильтониана | 16 | 4 | 4 | | 8 | 8 |
| Текущий контроль (КСР) | 2 | | | | | |
| Промежуточная аттестация – экзамен/зачет | экзамен | | | | | |
| Итого | 144 | 32 | 32 | | 64 | 78 |

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (экзамен).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. В каждом семестре проводятся контрольные работы. Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением. Обсуждение итогов контрольных работ. Изучение литературы и проработка теоретического материала лекционных занятий;

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | Шкала оценивания сформированности компетенций | | | | | |
|--|---|---------------------|-------------------|--------|--------------|---------|
| | плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично |
| | Не зачтено | | Зачтено | | | |

| | | | | | | | |
|---------------|--|--|---|---|--|--|--|
| <u>Знания</u> | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок. | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок. | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. |
| <u>Умения</u> | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки. | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u> | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки. | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами. | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов. | Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач. |

Шкала оценки при промежуточной аттестации

| Оценка | | Уровень подготовки |
|---------|--------------|--|
| зачтено | Превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |
| | Отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично» |
| | Очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо» |
| | Хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо» |

| | | |
|------------|---------------------|--|
| | Удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | Неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо» |
| | Плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

5.1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Контрольные вопросы

| вопросы | Код формируемой компетенции |
|---|-----------------------------|
| 1. Теория Флоке-Ляпунова для систем ЛДУ с периодическими коэффициентами. Формулировка. | УК-1 |
| 2. Поведение системы в окрестности состояния равновесия и периодической траектории. | УК-1 |
| 3. Метод нормальной формы для окрестности состояния равновесия. | ОПК-1 |
| 4. Гомологическое уравнение и резонансы. Примеры нормальных форм. | ОПК-1 |
| 5. Метод нормальной формы для окрестности периодической траектории. | ОПК-1 |
| 6. Метод нормальной формы и простейшие локальные бифуркации. Применение к системам специального типа (гамильтоновым, обратимым) | УК-1 |
| 7. Координатное представление для гамильтоновых систем, основные свойства, системы с одной степенью свободы. | УК-1 |
| 8. Гамильтоновы системы с полутора степенями свободы и симплектические диффеоморфизмы плоскости. | УК-1 |
| 9. Интегрируемые системы, неподвижные точки симплектических диффеоморфизмов | ОПК-1 |
| 10. Теорема Пуанкаре-Ляпунова, окрестность резонансной кривой при возмущении. | УК-1 |
| 11. Линейные гамильтоновы системы, спектр. | УК-1 |
| 12. Нормальная форма квадратичного гамильтониана. | ОПК-1 |

5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции УК-1

- I. Семейство линий $y = Cx^3$ является общим решением дифференциального уравнение:
- 1) $xy' = 3y$; 2) $y^2 + y'^2 = 1$; 3) $x^2y' - xy = yy'$; 4) $y' = 3y^{2/3}$; 5) $y = e^{xy/y}$.
- II. Выражение $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$ - общий интеграл дифференциального уравнения:
- 1) $xydx + (x+1)dy = 0$; 2) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$; 3) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$; 4) $xy' + y = y^2$; 5) $y' = 10^{x+y}$.
- III. Дифференциальное уравнение является однородным:
- 1) $(x+2y-1)dx + xdy = 0$; 2) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$; 3) $(x+y)dx + (y-1)dy = 0$; 4) $(x^2+y)dx - xydy = 0$; 5) $(1-x)dx + (x+y)dy = 0$.
- IV. Функция $\mu(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$ - интегрирующий множитель дифференциального уравнения:
- 1) $(x^2 - y)dx + x(y+1)dy = 0$; 2) $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$; 3) $(x^2 - y^2 + y)dx - xdy = 0$; 4) $xy^2(xy' + y) = 1$; 5) $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$.
- V. Дифференциальное уравнение $(x+1)y'' = y + \sqrt{y}$ имеет единственное решение при начальных условиях:
- 1) $x_0 = -1, y_0 < 0, y'_0$ - любое; 2) $x_0 = -1, y_0 > 0, y'_0$ - любое; 3) $x_0 \neq -1, y_0 = 0, y'_0 = 1$; 4) $x_0 = -1, y_0 = -2, y'_0 = 0$; 5) $x_0 = -1, y_0 = 0, y'_0 = 0$.
- VI. Функция $y = 0,25x^2$ является особым решением дифференциального уравнения:
- 1) $y = 2xy' - 4y'^2$; 2) $y = xy' - y'^2$; 3) $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$; 4) $xy' - y = \ln y'$; 5) $x = y^2 + y'$.
- VII. Уравнение $y'' - 2y' = 2e^x$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $y(1) = -1, y'(1) = 0$:
- 1) $y = (7 - 3x)e^{x-2}$; 2) $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$; 3) $y = e^{2x} - 3e^x - 1$; 4) $y = e^{-x} - e + x - 1$; 5) $y = -2x^2 + 4x + 1$.
- VIII. Выражение $y = x^2e^x$ - частное решение (возможно более низкого порядка) дифференциального уравнения:
- 1) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 2) $y'' + 2y' + y = 0$; 3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
- IX. Система функций линейно зависима:
- 1) $x+2, x-2$; 2) $6x+9, 8x+12$; 3) $\sin x, \cos x$; 4) $1, x, x^2$; 5) e^x, e^{2x}, e^{3x} .
- X. Уравнением Эйлера является:
- 1) $x^2y'' - 4y' + 6y = 0$; 2) $x^2y'' - 2y' - 3y = 0$; 3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; 4) $x^3y''' + x^2y' - y = 0$; 5) $(x-2)^2y'' - 3y' + 4y = 0$.
- XI. Функция $y = x^3$ является решением уравнение:
- 1) $x^2y'' - 4y' + 6y = 0$; 2) $x^2y'' - 2y' - 3y = 0$; 3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; 4) $x^3y''' + x^2y' - y = 0$; 5) $(x-2)^2y'' - 3y' + 4y = 0$.

5.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1

- XII. Функция $f(x, y)$ не удовлетворяет условию Липшица по y на прямой $y = -x$:
- 1) $f(x, y) = x^2 - y^2$; 2) $f(x, y) = x + y$; 3) $f(x, y) = x^2 + y^2$; 4) $f(x, y) = 1 + \sqrt{x + y}$;
 - 5) $f(x, y) = 1 + x + y$.
- XIII. Расстояние между соседними нулями уравнения $y'' + 2xy = 0$ на $[20; 45]$ удовлетворяет оценкам:
- 1) $0,5 < d < 1$; 2) $0,33 < d < 0,5$; 3) $0,2 < d < 0,3$; 4) $0,1 < d < 0,2$;
 - 5) $0,31 < d < 0,33$.
- XIV. Нулевое решение системы устойчиво:
- 1) $x' = x, y' = 2y$; 2) $x' = 2x, y' = y$; 3) $x' = -x, y' = y$; 4) $x' = -x, y' = -2y$;
 - 5) $x' = x, y' = -y$;
- XV. Особая точка $(0, 0)$ системы является седлом:
- 1) $x' = 3x, y' = 2x + y$; 2) $x' = x + 3y, y' = -6x - 5y$; 3) $x' = x, y' = 2x - y$; 4) $x' = -2x - 5y, y' = 2x + 2y$;
 - 5) $x' = 3x + y, y' = y - x$.
- XVI. Выражение $z = f(x^2 + y^2)$ есть общее решение уравнения:
- 1) $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 2) $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 3) $2y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 4) $y \frac{\partial z}{\partial x} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
 - 5) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lyapunov1950ru.djvu>

2. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Ajns1939ru.djvu>

3. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Golubev1950ru.djvu>

4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/KoddingtonLevinson1958ru.djvu>

б) дополнительная литература:

1. М.В.Федорюк. Асимптотика, интегралы, ряды. СМБ, М.: Наука, Физматгиз, 1987.

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Fedoryuk_ODE_1977ru.djvu

2. В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт, Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/ArnoldKozlovNejshtadt1985ru.djvu>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: учебная доска, компьютер, проектор, экран.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика.

Автор (ы) д.ф-м.н., профессор Лерман Л.М.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой к.ф-м.н., доцент А.В.Калинин

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.