

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Группы и алгебры Ли

---

Уровень высшего образования

Магистратура

---

Направление подготовки / специальность

01.04.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Фундаментальная математика и приложения

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.11 Группы и алгебры Ли относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1: Знать принципы системного подхода, позволяющие осуществлять анализ проблемных ситуаций. УК-1.2: Уметь вырабатывать стратегию действий основываясь на критическом анализе проблемных ситуаций. УК-1.3: Владеть навыками системного подхода к анализу проблемных ситуаций.	УК-1.1: Знать основные методы и результаты теории групп и алгебр Ли  УК-1.2: Уметь применять теоретические знания к исследованию групп и алгебр Ли  УК-1.3: Владеть навыками исследования групп и алгебр Ли	Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы
ОПК-2: Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1: Знать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении. ОПК-2.2: Уметь модифицировать, анализировать и реализовывать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении. ОПК-2.3: Владеть навыками модификации, анализа и реализации новых математических моделей в современном естествознании, технике,	ОПК-2.1: Знать основы теории групп и алгебр Ли  ОПК-2.2: Уметь анализировать группы и алгебры Ли возникающие в различных математических моделях  ОПК-2.3: Владеть навыками анализа групп и алгебр Ли	Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы

	экономике и управлении.			
--	-------------------------	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>75</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Гладкие многообразия	19	2	2	4	15
Тема 2. Группы Ли	42	6	6	12	30
Тема 3. Алгебры Ли	46	8	8	16	30
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	108	16	16	33	75

#### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Гладкие многообразия

Тема 2. Группы Ли

Тема 3. Алгебры Ли

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "Группы и алгебры Ли 4 курс (математика)"

(<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=4499>).

- открытый онлайн-курс МООС "-" (-).

Иные учебно-методические материалы: Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М: Мир, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

##### **5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

##### **5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции УК-1:**

1. Определение гладкого многообразия. Гладкие отображения многообразий. Подмногообразие. Примеры.

2. Касательный вектор как дифференцирование в точке. Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциал гладкого отображения.

3. Гладкое векторное поле. Коммутатор векторных полей. Алгебра Ли векторных полей. Ф-связанные векторные поля. Распределения. Интегрируемость.

4. Определение группы Ли. Примеры. Подгруппы Ли. Гомоморфизм групп Ли.

5. Действие группы Ли на многообразии. Орбиты. Стабилизатор точки. Ядро гомоморфизма групп Ли.

6. Однородное пространство: структура многообразия, действие группы.

7. Левоинвариантные векторные поля. Алгебра Ли группы Ли. Примеры.

8. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты.

9. Связные абелевы группы Ли.

10. Гомоморфизм групп Ли и соответствующий гомоморфизм алгебр Ли.
11. Присоединенное представление.
12. Подалгебры, идеалы, факторалгебры алгебры Ли. Теоремы о гомоморфизмах.
13. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля.
14. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли.
15. Показать, что множество всех гамильтоновых векторных полей в  $R^n$ ,  $n=2m$ , является подалгеброй алгебры Ли всех гладких векторных полей.
16. Найти все с точностью до изоморфизма трехмерные нильпотентные алгебры Ли.
17. Доказать, что алгебра Ли  $sl(n, R)$  – простая алгебра Ли.
18. Найти алгебру Ли группы  $GL(n, R)$ ,  $SL(n, R)$ .
19. Найти алгебру Ли группы  $SO(3)$ . Найти размерность группы  $O(n, R)$ .
20. Найти алгебру Ли группы  $SU(2)$ .
21. Доказательство сходимости ряда  $e^A$ . Экспоненциальное отображение на группе  $GL(n, R)$ .
22. Привести примеры однопараметрических подгрупп в вещественной ортогональной группе  $O(3)$ .
23. Вычислить группу  $\pi_1(G)$ ,  $G=SO(3)$ ,  $SO(n)$ .
24. Построить все системы корней ранга 2.

### **5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:**

1. Показать, что пространство ассоциативной алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно произведения  $[a, b] = ab - ba$ .
2. Пусть  $A$  – алгебра над полем  $K$ . Показать, что множество всех дифференцирований алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно коммутатора  $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ .
3. Найти все дифференцирования алгебры кватернионов.
4. Найти все дифференцирования алгебры многочленов, алгебры многочленов Лорана. Доказать, что над полем нулевой характеристики эти алгебры простые.
5. Пусть  $K$  – поле характеристики  $p > 0$ . Найти алгебру Ли дифференцирований алгебры срезанных многочленов  $K[x]/(x^p)$ .
6. Показать, что множество векторных полей с нулевой дивергенцией является подалгеброй Ли алгебры Ли всех гладких векторных полей в  $R^n$ .

7. Показать, что множество всех гамильтоновых векторных полей в  $R^n$ ,  $n=2m$ , является подалгеброй алгебры Ли всех гладких векторных полей.
8. Найти все с точностью до изоморфизма трехмерные нильпотентные алгебры Ли.
9. Доказать, что алгебра Ли  $sl(n, R)$  – простая алгебра Ли.
10. Найти алгебру Ли группы  $GL(n, R)$ ,  $SL(n, R)$ .
11. Найти алгебру Ли группы  $SO(3)$ . Найти размерность группы  $O(n, R)$ .
12. Найти алгебру Ли группы  $SU(2)$ .
13. Доказательство сходимости ряда  $e^A$ . Экспоненциальное отображение на группе  $GL(n, R)$ .
14. Привести примеры однопараметрических подгрупп в вещественной ортогональной группе  $O(3)$ .
15. Найти неприводимые представления алгебры Ли  $sl(2)$ .
16. Справедлива или нет теорема Ли для разрешимых алгебр Ли над произвольным полем? Привести примеры.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Решены все задачи. Допущено минимальное количество ошибок.
не зачтено	Не решено большинство задач.

#### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

##### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	отказа обучающегося от ответа		ошибок	несколько негрубых ошибок	несколько несущественных ошибок	нет.	
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### **5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

#### **5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1**

1. Гладкие многообразия. Подмногообразия. Гладкие отображения.
2. Определение и примеры групп Ли.
3. Алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии.  $\Phi$ -связанные векторные поля.
4. Левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли.
5. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты.
6. Теорема Картана о замкнутых подгруппах групп Ли.
7. Действие группы Ли на многообразии. Орбиты. Стабилизаторы.
8. Однородные пространства. Факторгруппа по замкнутой подгруппе.
9. Алгебра Ли подгруппы Ли, нормальной подгруппы.
10. Системы корней. Классификация простых комплексных алгебр Ли.
11. Интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса.
12. Соответствие Ли.

#### **5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2**

1. Найти все алгебры Ли размерности 3 над полем вещественных чисел.
2. Найти все неприводимые вещественные конечномерные представления алгебры Ли  $sl(2)$ .
3. Доказать, что алгебра Ли дифференцирований алгебры многочленов над  $\mathbb{R}$  является простой бесконечномерной алгеброй Ли.
4. Алгебры Ли групп  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .
5. Алгебры Ли групп классических линейных групп.
6. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля.
7. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли.
8. Критерий Киллинга разрешимости и полупростоты.
9. Корни относительно подалгебры Картана.



10. Универсальная обертывающая алгебра. Теорема Пуанкаре- Биркгофа-Витта.

11. Теорема Адо-Ивасава.

### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно».
не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно» или «плохо».

### **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

Основная литература:

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Ч. 1 / пер. с англ. Д. А. Райкова. - М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. - 316 с. - 18.15., 2 экз.
2. Понтрягин Лев Семенович. Непрерывные группы. - 4-е изд. - М. : Наука, 1984. - 520 с. - 3.10., 4 экз.

Дополнительная литература:

1. Серр Жан-Пьер. Алгебры Ли и группы Ли / пер. с англ. и фр. А. Б. Волынского ; под ред. А. Л. Онищика. - М. : Мир, 1969. - 375 с. : с черт. - (Библиотека сборника "Математика"). - 1.06., 2 экз.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли : подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли / пер. с фр. А. Н. Рудакова ; под ред. А. И. Кострикина. - М. : Мир, 1978. - 342 с. - (Элементы математики). - 2.20., 3 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Электронная библиотека «Мир уравнений» (Eqworld)  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Кузнецов Михаил Иванович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.