

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от "30"ноября 2022 г.
№13

Рабочая программа дисциплины
«Стохастические дифференциальные уравнения»

Уровень высшего образования
Подготовка научных и научно-педагогических кадров

Научные специальности

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика, 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела, 1.2.1. Искусственный интеллект и машинное обучение, 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, 1.3.11. Физика полупроводников, 1.3.19. Лазерная физика, 1.3.4. Радиофизика, 1.3.7. Акустика, 1.3.8. Физика конденсированного состояния, 1.4.1. Неорганическая химия, 1.4.2. Аналитическая химия, 1.4.3. Органическая химия, 1.4.4. Физическая химия, 1.4.7. Высокомолекулярные соединения, 1.4.8. Химия элементоорганических соединений, 1.5.11. Микробиология, 1.5.15. Экология, 1.5.2. Биофизика, 1.5.21. Физиология и биохимия растений, 1.5.5. Физиология человека и животных, 2.2.2. Электронная компонентная база микро и нанoeлектроники, квантовых устройств, 3.2.7. Аллергология и иммунология, 5.1.1. Теоретико-исторические правовые науки, 5.1.2. Публично-правовые (государственно-правовые) науки, 5.1.3. Частно-правовые (цивилистические) науки, 5.1.4. Уголовно-правовые науки, 5.1.5. Международно-правовые науки, 5.12.1. Междисциплинарные исследования когнитивных процессов, 5.2.3. Региональная и отраслевая экономика, 5.2.4. Финансы, 5.2.6. Менеджмент, 5.3.7. Возрастная психология, 5.4.2. Экономическая социология, 5.4.4. Социальная структура, социальные институты и процессы, 5.4.6. Социология культуры, 5.4.7. Социология управления, 5.5.2. Политические институты, процессы, технологии, 5.5.4. Международные отношения, глобальные и региональные исследования, 5.6.1. Отечественная история, 5.6.2. Всеобщая история, 5.6.7. История международных отношений и внешней политики, 5.7.1. Онтология и теория познания, 5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания, 5.8.7. Методология и технология профессионального образования, 5.9.2. Литературы народов мира, 5.9.5. Русский язык. Языки народов России, 5.9.6. Языки народов зарубежных стран (с указанием конкретного языка или группы языков), 5.9.9. Медиакоммуникации и журналистика

Нижний Новгород
2023 год

1. Место и цель дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Стохастические дифференциальные уравнения» относится к числу факультативных дисциплин образовательного компонента программы аспирантуры и изучается на 3 году обучения в 5 семестре.

Цель дисциплины – углубленное изучение важного современного раздела теории вероятностей и теории случайных процессов.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Выпускник, освоивший программу, должен

Знать:

– основные идеи, методы, результаты теории стохастических дифференциальных уравнений

Уметь:

– при решении исследовательских и прикладных задач в области теории вероятностей и математической статистики применять методы теории стохастических дифференциальных уравнений

Владеть:

– навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач теории вероятностей и математической статистики

3. Структура и содержание дисциплины.

Объем дисциплины (модуля) составляет 2 з.е., всего – 72 часа, из которых 36 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа – 18 часов, практические занятия – 16 часов), 36 часов составляет самостоятельная работа обучающегося.

Таблица 2

Структура дисциплины

Наименование раздела дисциплины	Всего, часов	В том числе					
		Контактная работа, часов					Самостоятельная работа обучающегося, часов
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Консультации	Всего	
Процессы Ито и формула Ито	8	2	2	0	0	4	4
Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы	22	6	6	0	0	12	10
Оптимальная линейная фильтрация и стохастическое оптимальное управление	30	8	8	0	0	16	14
Численное решение стохастических дифференциальных уравнений	12	2	2	0	0	4	8
Промежуточная аттестация: – зачет							
Итого							

Таблица 3**Содержание дисциплины**

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела	Форма проведения занятия	Форма текущего контроля*
1.	Процессы Ито и формула Ито	Определение процесса Ито. Формула Ито для скалярных процессов. Формула Ито для векторных процессов. Теорема о представлении мартингала.	лекции, практики	собеседование, задачи
2.	Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы	Задачи, приводящие к математическим моделям в виде СДУ (фильтрация, стохастическое управление, финансовая математика и др.). Уравнение Ланжевена и его математическая интерпретация. Построение интеграла Ито. Теорема существования и единственности решения СДУ Ито. Слабые и сильные решения СДУ. Некоторые приемы нахождения решения конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито. Определение диффузионного процесса Ито. Марковское свойство диффузионных процессов. Производящий дифференциальный оператор диффузионного процесса Ито. Формула Ито-Дынкина.	лекции, практики	собеседование, задачи
3.	Оптимальная линейная фильтрация и стохастическое оптимальное управление	Постановка задачи оптимальной фильтрации – предварительные результаты. Теория фильтрации Калмана – Бьюси. Одномерная задача фильтрации. Вывод уравнений фильтрации: линейные и измеримые оценки, инновационный (обновляющий) процесс, инновационный процесс и винеровский процесс, стохастическое дифференциальное уравнение для оценки. Постановки задач оптимального управления при случайных возмущениях. Оптимальное управление линейными системами с обратной связью по состоянию. Задача стабилизации. Стохастическая функция Ляпунова-Беллмана. Постановка задачи управления на основе оценки состояния. Стохастический линейно-квадратический регулятор с обратной связью по выходу. Теорема разделения.	лекции, практики	собеседование, задачи
4	Численное решение стохастических дифференциальных уравнений	Численное моделирование винеровского процесса. Решение СДУ методами Эйлера и Рунге – Кутты. Слабые и сильные аппроксимации. Схемы Тейлора различных порядков. Схема Мильштейна. Численная устойчивость и точность методов.	лекции, практики	собеседование, задачи

4. Формы организации и контроля самостоятельной работы обучающихся

В процессе изучения дисциплины применяются лекционные и семинарские занятия. Применяются следующие виды лекций: 1) лекция-информация (ориентированная на изложение и объяснение научной информации, подлежащей осмыслению и запоминанию); 2) лекция-беседа (предполагающая непосредственное общение со слушателями посредством вопросов информационного, проблемного характера и вопросов для напоминания пройденного материала). Самостоятельная работа реализуется в форме изучения лекций и выполнения домашних заданий. Самостоятельная работа контролируется преподавателем как в ходе аудиторных занятий, так и во время внеаудиторной работы, в том числе посредством консультаций по электронной почте, видеосвязи, в социальных сетях.

5. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине

5.1. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

При выполнении всех работ учитываются следующие **основные критерии**:

- уровень теоретических знаний (подразумевается не только формальное воспроизведение информации, но и понимание предмета, которое подтверждается правильными ответами на дополнительные, уточняющие вопросы, заданные членами комиссии);
- умение использовать теоретические знания при анализе конкретных проблем, ситуаций;
- качество изложения материала, то есть обоснованность, четкость, логичность ответа, а также его полнота (то есть содержательность, не исключающая сжатости);
- способность устанавливать внутри- и межпредметные связи,
- оригинальность мышления, знакомство с дополнительной литературой и другие факторы.

Описание шкалы оценивания на промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Уровень подготовленности, характеризуемый оценкой
<i>Зачтено</i>	владение программным материалом, понимание сущности рассматриваемых процессов и явлений, умение самостоятельно обозначить проблемные ситуации в организации научных исследований, способность критически анализировать и сравнивать существующие подходы и методы к оценке результативности научной деятельности, свободное владение источниками, умение четко и ясно излагать результаты собственной работы, следовать нормам, принятым в научных дискуссиях.
<i>Не зачтено</i>	непонимание смысла ключевых проблем, недостаточное владение науковедческой терминологией, неумение самостоятельно обозначить проблемные ситуации, неспособность анализировать и сравнивать существующие концепции, подходы и методы, неумение ясно излагать результаты собственной работы, следовать нормам, принятым в научных дискуссиях.

5.2. Примеры типовых контрольных заданий или иных материалов, используемых для оценивания результатов обучения по дисциплине

Вопросы для собеседования:

1. Понятие стохастического процесса.
2. Постановки задач управления при случайных возмущениях.
3. Постановка задачи управления на основе оценки состояния.
4. Построение процесса броуновского движения (винеровского процесса) на основе теоремы Колмогорова).
5. Существование непрерывной версии винеровского процесса.
6. Интеграл Ито и его свойства.
7. Формулы Ито для скалярных и векторных процессов
8. Теорема существования и единственности решения СДУ
9. Особенности численного решения СДУ
10. Определение диффузионного процесса Ито. Марковское свойство диффузионных процессов.
11. Производящий дифференциальный оператор диффузионного процесса Ито. Формула Дынкина.
12. Постановка задачи оптимальной фильтрации
13. Теорема Калмана-Бьюси
14. Матричное уравнение Риккати в задаче оптимальной фильтрации и его свойства.
15. Стохастическое оптимальное управление линейными системами с обратной связью по состоянию.
16. Стохастический линейно-квадратический регулятор с обратной связью по выходу.
17. Теорема разделения

Практические задачи:

Задача 1. Найти $M[B_t^6]$ при условии $B_0 = 0$.

Задача 2. Найти решение уравнения Ито

$$dX_t = \left(c + \frac{1}{2}\alpha^2\right)X_t dt + \alpha X_t dB_t$$

Задача 3. Решить систему уравнений Ито

$$\begin{aligned}dX_1 &= -\frac{1}{2}X_1 dt - \frac{a}{b}X_2 dB_t \\dX_2 &= -\frac{1}{2}X_2 dt + \frac{b}{a}X_1 dB_t \\a, b &> 0.\end{aligned}$$

Задача 4. Является ли мартингалом процесс $X_t = B_t^3 - 3tB_t$

Задача 5. Какому дифференциальному уравнению Ито соответствует уравнение Стратоновича $dX_t = \sin X_t \cos X_t dt + (t^2 + \cos X_t) \circ dB_t$

Задача 6. Найти производящий дифференциальный оператор процесса Ито

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t$$

Задача 7. Найти производящий дифференциальный оператор процесса Ито

$$dX_1 = -\frac{1}{2}X_1 dt - X_2 dB_t$$

$$dX_2 = -\frac{1}{2}X_2 dt + X_1 dB_t$$

Задача 8. Решить задачу фильтрации для скалярной системы

$$dX_t = F(t)X_t dt$$

$$dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t, Z_0 = 0$$

Задача 9. Найти производящий дифференциальный оператор процесса Ито

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t$$

Задача 10. Найти производящий дифференциальный оператор процесса Ито

$$dX_1 = -\frac{1}{2}X_1 dt - X_2 dB_t$$

$$dX_2 = -\frac{1}{2}X_2 dt + X_1 dB_t$$

Задача 11. Решить скалярную задачу управления

$$dX_t = X_t dt + U dt + X dB_t$$

$$J = M \left[\int_0^t (X^2 + U^2) dt \right]$$

Задача 12. Решить скалярную задачу управления с неполной информацией

$$dX_t = U_t dt + c dB_t$$

$$dZ_t = X_t dt + dV_t$$

$$J = M \left[\int (X_t^2 + U_t^2) dt \right]$$

c - скаляр B, V - независимые стандартные винеровские процессы.

Задача 13. Решить задачу фильтрации для скалярной системы

$$dX_t = 0, M[X_0] = 0, M[X_0^2] = a^2$$

$$dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t, Z_0 = 0$$

Задача 14. Решить скалярную задачу управления

$$dX_t = X_t dt + U dt + X dB_t$$

$$J = M \int_0^t (X^2 + U^2) dt$$

Вопросы для зачета

1. Перечислите свойства винеровского процесса
2. Уравнение Ланжевена и его математическая интерпретация
3. Перечислите основные этапы построения интеграла Ито
4. Свойство изометрии и другие свойства интеграла Ито
5. Интеграл Ито как мартингал
6. Формула Ито для векторных процессов
7. Слабые и сильные решения СДУ Ито
8. Некоторые приемы нахождения решения конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито.
9. Решение СДУ методами Эйлера и Рунге – Кутты.
10. Марковское свойство диффузионных процессов.
11. Теория фильтрации Калмана - Бьюси.
12. Достаточные условия оптимальности управления при случайных возмущениях.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

а) Основная литература

1. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1985. – 559 с. (2 экз.)
2. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2003. – 400 с. (2 экз.)

б) Дополнительная литература

1. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975 – 320 с. . (15 экз.)
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 611 с. (2 экз.)
4. Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. – Свердловск. Издательство Свердловского государственного университета, 1988. – 223 с. (1 экз.)

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

архивы математических журналов на сайте mathnet.ru

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- помещения для проведения занятий: лекционного типа, семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования и помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ;
- материально-техническое обеспечение, необходимое для реализации дисциплины, включая лабораторное оборудование;

- лицензионное программное обеспечение: *Windows, Microsoft Office*;
 - обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечиваются электронными и (или) печатными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.
- ресурсам.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом, Положением о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Постановление Правительства РФ от 30.11.2021 № 2122), Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Приказ Минобрнауки РФ от 20.10.2021 № 951).

Автор: Пакшин П.В., профессор кафедры теории вероятностей и анализа данных ИИТММ

Рецензент(ы) _____

Заведующий кафедрой _____

Программа одобрена на заседании Методической комиссии Института /факультета от _____ 2022 года, протокол № ____.