

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.  
Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
протокол от  
«14» декабря 2021 г. № 4

## **Рабочая программа дисциплины**

**Рабочая программа дисциплины**

**Целочисленное программирование**

Уровень высшего образования  
**бакалавриат**

Направление подготовки  
**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность образовательной программы  
**Прикладная математика и информатика (общий профиль)**

Форма обучения  
**очная**

Нижегород

2022

## 1. Место и цели дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.  
Код дисциплины Б1.ДВ.05.01.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.ДВ.05.01 «Целочисленное программирование» относится к части ООП направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине ), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
ПК-13  Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	ПК-13.1. Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике	Знает основные понятия и результаты линейного и целочисленного линейного программирования	Собеседование контрольная работа
	ПК-13.2. Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований	Знает основные методы линейного программирования, новые средства и технологии в сфере прикладных областей, в которых необходимо решение задач линейного и целочисленного линейного программирования.	Собеседование контрольная работа
	ПК-13.3. Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности	Умеет приобретать и применять новые научные и профессиональные знания с использованием современных информационных технологий для решения задач линейного и целочисленного линейного программирования, решать основные задачи линейного и целочисленного линейного программирования, применять методы линейного программирования в практической сфере: экономике, производстве и др.	Собеседование контрольная работа

	ПК-13.4. Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований	Владеет современными техническими и технологическими средствами, необходимыми для решения поставленных задач линейного и целочисленного линейного программирования, навыками поиска информации о новых технологических достижениях, необходимых для решения задач по оптимизации.	Собеседование контрольная работа
--	---	---	----------------------------------

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

<b>Общая трудоемкость</b>	<b>3 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
<b>в том числе</b>	
<b>контактная работа:</b>	<b>50</b>
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	32
- текущий контроль (КСР)	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>22</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>36</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,  форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего, час.	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы, из них				Самостоятельная работа, час.
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Постановка и примеры задач линейного и целочисленного линейного программирования	5	3	3		6	5
Задача линейного программирования		3	3		6	5
Методы отсечений: 1-й алгоритм Гомори	5	3	3		6	4
Теория линейных неравенств	5	3	3		6	4
Системы линейных уравнений над кольцом целых чисел	5	4	4		8	4
Текущий контроль	2				2	
Промежуточная аттестация – экзамен	36					
<b>Итого</b>	<b>108</b>	<b>16</b>	<b>16</b>		<b>34</b>	<b>22</b>

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

#### 3.3. Содержание разделов дисциплины

- 1. Постановка и примеры задач линейного и целочисленного линейного программирования.** Формулировка задач линейного и целочисленного линейного программирования. Примеры задач дискретной оптимизации (о коммивояжере, о

назначениях, о рюкзаке, экстремальные задачи на графах и булевых функциях). Их сведение к задачам целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП).

- 2 **Задача линейного программирования.** Прямой симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись. Метод искусственного базиса. Двойственный симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись. Экспоненциальная верхняя оценка трудоемкости симплекс-метода (Кли и Минти). Теорема двойственности в линейном программировании. Свойство дополняющей нежесткости. Разрыв двойственности в ЦЛП.  
*Контрольная работа № 1.*
3. **Методы отсечений: 1-й алгоритм Гомори.** Идея метода отсечений и его геометрическая интерпретация. Выбор вычислительной схемы. Две леммы Р.Гомори о правильных отсечениях. 1-й алгоритм Гомори и доказательство его конечности.  
*Контрольная работа № 2.*
4. **Теория линейных неравенств.** Основная теорема о линейных неравенствах. Выпуклые множества и конусы, их связь. Крайние точки и экстремальные векторы. Политоп и полиэдр, симплекс. Теорема о максимизации выпуклой функции на политопе. Крайние точки и опорные планы в канонической задаче линейного программирования. Теорема Каратеодори. Крайние точки полиэдра. Критерий существования, ценка их числа. Теоремы Фаркаша, Минковского, Вейля о выпуклом конусе. Параметрическое задание множества решений системы линейных неравенств. Связь понятий “полиэдр” и “политоп”. Построение остова сопряженного конуса. Триангуляция полиэдров.
5. **Системы линейных уравнений над кольцом целых чисел.** Эквивалентность матриц над кольцом целых чисел. Нормальная диагональная форма (НДФ) и теорема о приведении к ней. Системы линейных уравнений над кольцом целых чисел. Критерий совместности и способы решения. Подрешетки решетки  $\mathbb{Z}^n$ -мерных целочисленных векторов, их задание. Унимодулярные матрицы. Целочисленный вариант теоремы двойственности. Теоремы Кенига, Холла, Дилворта, о максимальном потоке. Множество решений крамеровской системы линейных сравнений. Их использование для построения отсечений в ЦЛП.  
*Контрольная работа № 3.*

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Ниже приводятся виды самостоятельной работы студентов, порядок их выполнения и контроля, приводится учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы по ее отдельным видам и разделам дисциплины.

##### **4.1. Виды самостоятельной работы**

- проработка теоретического материала лекционных занятий;
- подготовка домашних заданий к практическим занятиям;
- подготовка и выполнение письменных контрольных работ;
- подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена.

##### **4.2. Проработка теоретического материала лекционных занятий**

Выполняется самостоятельно с использованием лекционных материалов и материалов, разобранных в литературе (список обязательной и дополнительной литературы приводится). Контроль выполняется в форме проведения экспресс-опросов по понятиям, фактам, формулировкам, выполняемых на лекции. Экспресс-опрос оценивается оценками «Зачтено» / «Не зачтено».

##### **4.3. Подготовка домашних заданий к научно-практическим занятиям**

Домашние задания выдаются на практических занятиях.

Проверка выполнения домашних заданий проводится в начале каждого практического занятия. Используется две формы контроля:

- выборочная проверка выполнения заданий у двух-трех человек из группы;
- проверка в форме коллективного обсуждения у доски результатов выполнения отдельных заданий одним или двумя студентами.

#### 4.4. Подготовка к выполнению письменных контрольных работ

В течение учебного семестра проводится три домашних контрольные работы по материалам всех разделов дисциплины.

Для подготовки к контрольным работам рекомендуется повторить теоретических материал, просмотреть полезные разделы в соответствующих источниках из списка рекомендованной литературы, а также самостоятельно решать несколько задач по теме контрольной работы.

#### 4.5. Подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена

В качестве методических материалов при подготовке к экзамену рекомендуется использовать собственные конспекты лекций и источники, рекомендованные в списке литературы.

### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

включающий:

#### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Индикаторы компетенции	Оценка сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
<u>Знания</u>	отсутствие знаний материала	наличие грубых ошибок в основном материале	знание основного материала с рядом негрубых ошибок	знание основного материала с рядом заметных погрешностей	знание основного материала с незначительными погрешностями	знание основного материала без ошибок и погрешностей	знание основного и дополнительного материала без ошибок
<u>Умения</u>	полное отсутствие умений	недостаточно умений	умение использовать отдельные приемы при наличии существенных ошибок	умение использовать отдельные приемы при наличии незначительных ошибок	умение использовать отдельные приемы	умение использовать приемы	умение использовать приемы и способность принимать решение на этой основе
<u>Навыки</u>	полное отсутствие навыков	отсутствие навыков	наличие минимальных навыков	посредственное владение навыками	достаточное владение навыками	хорошее владение навыками	всестороннее владение навыками

#### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка	Уровень подготовки
Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
Удовлетворитель	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом

	хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
Неудовлетворите	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций, и контроля сформированности компетенций

### 5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
Примеры задач дискретной оптимизации. Их сведение к целочисленному программированию.	ПК-13
Прямой симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись.	ПК-13
Двойственный симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись.	ПК-13
Теорема двойственности в линейном программировании. Свойство дополняющей нежесткости.	ПК-13
Теорема двойственности в линейном программировании и разрыв двойственности в ЦЛП.	ПК-13
Идея метода отсечений и его геометрическая интерпретация. Выбор вычислительной схемы. Две леммы Р.Гомори о правильных отсечениях.	ПК-13
Основная теорема о линейных неравенствах.	ПК-13
Выпуклые множества и конусы, их связь. Крайние точки и экстремальные векторы. Политоп и полиэдр, симплекс. Теорема о максимизации выпуклой функции на политопе.	ПК-13
Крайние точки и опорные планы в канонической задаче линейного программирования. Теорема Каратеодори.	ПК-13
Крайние точки полиэдра. Критерий существования, оценка их числа.	ПК-13
Теоремы Фаркаша, Минковского, Вейля о выпуклом конусе.	ПК-13
Параметрическое задание множества решений системы линейных неравенств. Связь понятий “полиэдр” и “политоп”.	ПК-13
Построение остова сопряженного конуса. Разбиение полиэдра на обобщенные симплексы.	ПК-13
Эквивалентность матриц над кольцом целых чисел. Нормальная диагональная форма и теорема о приведении к ней.	ПК-13
Системы линейных уравнений над кольцом целых чисел. Целочисленная решетка и ее подрешетки. Построение множества решений.	ПК-13

### 5.2.2. Типовые задания для контрольных работ (ПК-13)

Каждый студент получает свой комплект данных.

Контрольная работа № 1 заключается в выполнении заданий 1, 2. № 2 – в выполнении заданий 3, 4, № 3 в выполнении заданий 5, 6.

$$c = (0, -2, 5, -2, -1), \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Задания:

1. Решить ЗЛП  $\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$
2. Записать условия двойственной ЗЛП. По решению прямой ЗЛП найти решение двойственной ЗЛП
3. Решить ЗЦЛП  $\max\{cx : Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbf{Z}^n\}$
4. Решить двойственную ЗЦЛП
5. Записать условия прямой элементарной ЗЦЛП и решить ее
6. Записать условия двойственной элементарной ЗЦЛП и решить ее

### 5.2.3. Примеры вопросов для собеседования

1. Примеры задач дискретной оптимизации. Их сведение к целочисленному программированию.
2. Прямой симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись.
3. Двойственный симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись.
4. Теорема двойственности в линейном программировании. Свойство дополняющей нежесткости.
5. Теорема двойственности в линейном программировании и разрыв двойственности в ЦЛП.
6. Идея метода отсечений и его геометрическая интерпретация. Выбор вычислительной схемы. Две леммы Р.Гомори о правильных отсечениях.
7. Основная теорема о линейных неравенствах.
8. Выпуклые множества и конусы, их связь. Крайние точки и экстремальные векторы. Политоп и полиэдр, симплекс. Теорема о максимизации выпуклой функции на политопе.
9. Крайние точки и опорные планы в канонической задаче линейного программирования. Теорема Каратеодори.
10. Крайние точки полиэдра. Критерий существования, оценка их числа.
11. Теоремы Фаркаша, Минковского, Вейля о выпуклом конусе.
12. Параметрическое задание множества решений системы линейных неравенств. Связь понятий “полиэдр” и “политоп”.
13. Построение остова сопряженного конуса. Разбиение полиэдра на обобщенные симплексы.
14. Эквивалентность матриц над кольцом целых чисел. Нормальная диагональная форма и теорема о приведении к ней.
15. Системы линейных уравнений над кольцом целых чисел. Целочисленная решетка и ее подрешетки. Построение множества решений.



## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. - М.: Наука, 1995. 192 с. (62 экз.)

### **б) дополнительная литература**

2. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи М.: Физматлит. 2011. <https://e.lanbook.com/book/2097>
3. Колоколов, А.А. Задачи и алгоритмы целочисленного программирования: анализ устойчивости: монография [Электронный ресурс]: монография / А.А. Колоколов, М.В. Девятирикова. — Электрон. дан. — Омск: ОмГУ, 2015. — 96 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/75404>.
4. Горлач, Б.А. Исследование операций [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4865>.
5. Горлач, Б.А. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2012. — 480 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4042>.

### **в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы**

1. Фонд образовательных электрон. ресурсов ННГУ <http://www.unn.ru/books/resources>
2. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)
3. Изд-во Лань (<https://e.lanbook.com/book>)

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: д.ф.-м.н., профессор кафедры АГиДМ Шевченко В.Н.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Зав. кафедрой алгебры, геометрии и дискретной математики: д.ф.-м.н. Золотых Н.Ю.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 1 декабря 2021 года, протокол № 2.