

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Группы Ли и дифференциальные уравнения

Уровень высшего образования

Магистратура

Направление подготовки / специальность

01.04.01 - Математика

Направленность образовательной программы

Фундаментальная математика и приложения

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.08 Группы Ли и дифференциальные уравнения относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1: Знать методы критического анализа проблемных ситуаций УК-1.2: Уметь вырабатывать стратегию действий при возникновении критических ситуаций УК-1.3: Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций	УК-1.1: Знает основные понятия и формулы группового анализа. УК-1.2: Умеет применять полученные знания по групповому анализу в проблемных ситуациях. УК-1.3: Владеет основными формулами группового анализа.	Контрольная работа	Экзамен: Контрольные вопросы
ОПК-1: Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных дисциплин в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2: Умеет выбирать методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний ОПК-1.3: Владеет навыками применения фундаментальных знаний в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знает терминологию и основные результаты группового анализа. ОПК-1.2: Умеет определять какие задачи можно решать с помощью группового анализа. ОПК-1.3: Владеет опытом применения группового анализа для понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений.	Контрольная работа	Экзамен: Контрольные вопросы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	2
самостоятельная работа	58
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0
Тема 1. Векторные поля и потоки	11	3	2	5	6
Тема 2. Группы Ли	22	8	4	12	10
Тема 3. Расслоение джетов. Продолжение векторного поля	11	3	2	5	6
Тема 4. Симметрии дифференциальных уравнений.	26	8	2	10	16
Тема 5. Понижение порядка обыкновенных дифференциальных уравнений.	36	10	6	16	20
Аттестация	36				
КСР	2				2
Итого	144	32	16	50	58

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Векторные поля и потоки

Тема 2. Группы Ли

Тема 3. Расслоение джетов. Продолжение векторного поля

Тема 4. Симметрии дифференциальных уравнений.

Тема 5. Понижение порядка обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973, С. 519

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Pontryagin1973ru.djvu>

2. Зайцев В.Ф. Введение в современный групповой анализ. Часть 1: Группы преобразований на плоскости (учебное пособие к спецкурсу). СПб.: РГПУ им. А.И.Герцена, 1996, с.39

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Zajcev_t1_1996ru.pdf

3. Зайцев В.Ф. Введение в современный групповой анализ. Часть 2: Уравнения первого порядка и допускаемые ими точечные группы (учебное пособие к спецкурсу). СПб.: РГПУ им. А.И.Герцена, 1996, С. 40

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Zajcev_t2_1996ru.pdf

4. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983, С.280

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Ibragimov1983ru.djvu>

5. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989, С.48

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Ibragimov1989ru.djvu>

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции УК-1:

$$x' = \frac{ax + b}{1 - cx}, (a, b, c \in \mathbb{R}, b + ac \neq 0)$$

найти

1. Для группы проективных преобразований прямой какой-либо базис левоинвариантных векторных полей и структурные константы группы относительно этого базиса

2. Является ли вполне интегрируемым распределение на $\mathbb{R}^3 \setminus 0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$, заданное векторными полями $V_1 = y\partial_x - x\partial_y$, $V_2 = z\partial_x - x\partial_z$, $V_3 = y\partial_z - z\partial_y$?

3. На группе собственных движений плоскости найти левоинвариантное поле, соответствующее однопараметрической подгруппе параллельных переносов с каким-либо направляющим вектором.

4. На группе собственных движений плоскости найти левоинвариантное поле, соответствующее однопараметрической подгруппе поворотов.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1. Проверить, что векторное поле $V = (x, nU)$ определяет симметрии уравнения $U''x^{2-n} = F(Ux^{-n}, U'x^{1-n})$ и понизить порядок этого уравнения с помощью метода дифференциальных инвариантов
2. Проверить, что векторное поле $V = (x, nU)$ определяет симметрии уравнения $U''x^{2-n} = F(Ux^{-n}, U'x^{1-n})$ и понизить порядок этого уравнения с перехода к каноническим переменным.
3. Проинтегрировать уравнение $y_x + y^2 - 2yx^2 + x^4 - 2x - 1 = 0$ методом канонических переменных, используя симметрию $V = \partial_x + 2x\partial_y$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Решены все задачи. Допущено минимальное количество ошибок.
не зачтено	Не решено большинство задач.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Левоинвариантные векторные поля на группе Ли и их свойства. Примеры.
2. Теорема Фробениуса для распределений, заданных с помощью векторных полей.
3. Инфинитезимальный критерий инварианта действия группы.
4. Инфинитезимальный критерий инвариантности подмногообразия.
5. Продолжения преобразований многообразия на расслоения джетов
6. Продолжения векторного поля на расслоении джетов.
7. Общая формула продолжения векторного поля.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Левоинвариантные дифференциальные формы на группе Ли.
2. Теорема Фробениуса для распределений, заданных с помощью линейных дифференциальных форм.
3. Построение локальной группы Ли по структурным уравнениям.
4. Инфинитезимальный критерий симметрии системы дифференциальных уравнений
5. Алгоритм понижения порядка ОДУ с помощью метода дифференциальных инвариантов.
6. Алгоритм понижения порядка ОДУ с помощью метода канонических переменных.
7. Интегрируемость ОДУ в квадратурах.
8. Симметрии распределений.
9. Понижение порядка ОДУ с помощью симметрий распределения Картана.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы

Оценка	Критерии оценивания
	одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Ибрагимов Наиль Хайруллович. Группы преобразований в математической физике. - М. : Наука, 1983. - 280 с. : ил. - 2.10., 1 экз.

Дополнительная литература:

1. Понтрягин Лев Семенович. Непрерывные группы. - Изд. 3-е, испр. - М. : Наука, 1973. - 519 с. - 2.63., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989, С.48

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Ibragimov1989ru.djvu>

Зайцев В.Ф. Введение в современный групповой анализ. Часть 1: Группы преобразований на плоскости (учебное пособие к спецкурсу). СПб.: РГПУ им. А.И.Герцена, 1996, с.39

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Zajcev_t1_1996ru.pdf

Зайцев В.Ф. Введение в современный групповой анализ. Часть 2: Уравнения первого порядка и допускаемые ими точечные группы (учебное пособие к спецкурсу). СПб.: РГПУ им.

А.И.Герцена, 1996, С. 40

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Zajcev_t2_1996ru.pdf

Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>

Библиотека "Лань" <http://e.lanbook.com/>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Баландин Александр Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.