

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Качественно-численные методы исследования динамических систем

---

Уровень высшего образования  
Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы  
Математическое моделирование и вычислительная математика

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.04.02 Качественно-численные методы исследования динамических систем относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)  | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции   |  | Наименование оценочного средства                      |  |
|--|---|--|---|--|
|  | Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)   | Результаты обучения по дисциплине  | Для текущего контроля успеваемости                    | Для промежуточной аттестации             |
| ПК-4: Способен применять методы математического и компьютерного исследования при анализе задач на основе знаний фундаментальных математических и компьютерных наук | <p>ПК-4.1: Знает фундаментальные и теоретические основы, необходимые для исследования научных проблем</p> <p>ПК-4.2: Умеет самостоятельно применять полученные знания для анализа объекта исследования, определять цели и задачи исследования, а также выбирать корректный метод исследования научной проблемы</p> <p>ПК-4.3: Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности, а именно решения научных задач в соответствии с поставленной целью и выбранной методикой</p> | <p>ПК-4.1: Знать основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук.</p> <p>ПК-4.2: Уметь анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук. а также выбирать корректный метод исследования научной проблемы</p> <p>ПК-4.3: Владеть опытом научно-исследовательской деятельности, применения фундаментальных разделов математики, базовых знаний естественнонаучного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач.</p> | <p>Контрольная работа</p> <p>Практическое задание</p> | <p>Зачёт:</p> <p>Контрольные вопросы</p> |

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

|  |                          |
|--|--------------------------|
|  | <b>очная</b>             |
| <b>Общая трудоемкость, з.е.</b>  | <b>3</b>                 |
| <b>Часов по учебному плану</b>   | <b>108</b>               |
| в том числе  |                          |
| <b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>                           |                          |
| - занятия лекционного типа   | <b>16</b>                |
| - занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы) | <b>16</b>                |
| - КСР  | <b>1</b>                 |
| <b>самостоятельная работа</b>  | <b>75</b>                |
| <b>Промежуточная аттестация</b>  | <b>0</b><br><b>Зачёт</b> |

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

| Наименование разделов и тем дисциплины   | Всего (часы) | в том числе  |  |             |   |
|--|--------------|--|--|-------------|---|
|  |              | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них |  |             | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
|  |              | Занятия лекционного типа   | Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы | Всего       |   |
| 0<br>Ф<br>0  | 0<br>Ф<br>0  | 0<br>Ф<br>0  | 0<br>Ф<br>0  | 0<br>Ф<br>0 |   |
| 1. Математическая модель динамической системы и задача ее исследования   | 14           | 2  | 2  | 4           | 10  |
| 2. Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка   | 23           | 4  | 4  | 8           | 15  |
| 3. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка                        | 25           | 4  | 4  | 8           | 17  |
| 4. Неавтономные динамические системы второго порядка с периодическими правыми частями  | 21           | 4  | 2  | 6           | 15  |
| 5. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений | 24           | 2  | 4  | 6           | 18  |
| Аттестация   | 0            |  |  |             |   |
| КСР  | 1            |  |  | 1           |   |
| <b>Итого</b>   | <b>108</b>   | <b>16</b>  | <b>16</b>  | <b>33</b>   | <b>75</b>                                 |

#### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Математическая модель динамической системы и задача ее исследования: Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические систем. Фазовое пространство. Фазовые траектории. Математическая модель динамической системы. Примеры динамических систем. Задача исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портреты. Бифуркация.

2. Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка: Простые состояния равновесия. Фазовая плоскость линейной системы. Поведение фазовых траекторий нелинейной системы в окрестности состояния равновесия в случае действительных, комплексных, кратных корней характеристического уравнения. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями. Сложные состояния равновесия. Бифуркации состояний равновесия. Области притяжения устойчивых состояний равновесия.

3. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка: Численный метод отыскания состояний равновесия и определения их типа. Численный метод построения сепаратрис седловых состояний равновесия. Численный метод построения фазовой траектории, выходящей из произвольной точки фазовой плоскости.

4. Неавтономные динамические системы второго порядка с периодическими правыми частями: Сведение исследования структуры фазового пространства к точечному отображению плоскости в плоскость. Системы с цилиндрическим фазовым пространством. Типы периодических движений. Мультипликаторы. Бифуркации. Поведение фазовых траекторий в окрестности устойчивых, неустойчивых и седловых периодических движений. Области притяжения устойчивых периодических движений. Периодические движения колебательного и вращательного типов.

5. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений: Численные методы отыскания и исследования устойчивости периодических решений неавтономных динамических систем второго порядка. Численный метод построения сепаратрисных инвариантных кривых точечного отображения плоскости в плоскость.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Виды самостоятельной работы студентов:

- проработка теоретического материала лекционных занятий;
- подготовка к выполнению письменной контрольной работы;
- подготовка к промежуточной аттестации.

Проработка теоретического материала лекционных занятий

Выполняется самостоятельно обучающимся с использованием материалов лекций и рекомендованной основной и дополнительной литературы. Контроль выполняется на практических занятиях.

Подготовка к выполнению письменной контрольной работы

Аудиторная контрольная работа проводится по материалам темы «Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка».

Для подготовки к контрольной работе рекомендуется повторно просмотреть материалы соответствующих лекций и практических занятий.

Разбор контрольной работы и исправление ошибок проводится в часы контроля самостоятельной работы студентов.

Подготовка к промежуточной аттестации

Фактором успешного прохождения промежуточной аттестации является систематическая работа студента в течение всего периода изучения дисциплины. В этом случае подготовка к зачету будет концентрированной систематизацией всех полученных знаний, умений и навыков.

В качестве методических материалов при подготовке к зачету рекомендуется использовать

собственные конспекты лекций и рекомендованную основную и дополнительную литературу. Допуском к зачету является выполнение письменной контрольной работы и презентаций результатов двух практических заданий.

Дополнительная литература:

Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. -М.: Наука, 1976; 1990.

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия систем:

$$1) \ddot{x} + x^2 e^{-x} \dot{x} + x^3 + 2x = 0;$$

$$2) \ddot{x} + H(x)\dot{x} + \alpha x^3 + \beta x = 0; \quad \alpha > 0, \beta > 0, H(x) > 0;$$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

| Оценка     | Критерии оценивания   |
|------------|---|
| зачтено    | Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя |
| не зачтено | Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя  |

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Практическое задание) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

Являются ли приведенные ниже функции знакоопределенными? Знакопостоянными? Если да, то в какой области?

- a)  $V(x, y) = \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y + 1$ ;
- b)  $V(x, y) = \sin^2 x + \sin^2 y - 2 \sin x \sin y$ ;
- c)  $V(x, y) = x^4 + y^2 - y^3$ ;
- d)  $V(x, y, z) = x^2 y^4 z^6$ ;

**Критерии оценивания (оценочное средство - Практическое задание)**

| Оценка     | Критерии оценивания   |
|------------|---|
| зачтено    | Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя |
| не зачтено | Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя  |

**5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации**

**Шкала оценивания сформированности компетенций**

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | плохо   | неудовлетворительно   | удовлетворительно  | хорошо  | очень хорошо  | отлично  | превосходно  |
|--|---|---|--|---|---|--|--|
|  | не зачтено  |   |  | зачтено   |   |  |  |
| <u>Знания</u>  | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет. | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. |

|               |  |  |  |   |  |   |  |
|---------------|--|--|--|---|--|---|--|
| <u>Умения</u> | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки | Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u> | Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа   | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки  | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми и недочетами                                    | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми и недочетами   | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов   | Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов  | Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач  |

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

| Оценка     |                            | Уровень подготовки   |
|------------|----------------------------|--|
| зачтено    | <b>превосходно</b>         | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой |
|            | <b>отлично</b>             | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».  |
|            | <b>очень хорошо</b>        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»  |
|            | <b>хорошо</b>              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».   |
|            | <b>удовлетворительно</b>   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»                                     |
| не зачтено | <b>неудовлетворительно</b> | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».   |
|            | <b>плохо</b>               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»  |

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-4

1. Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические системы. Фазовое пространство. Математическая модель динамической системы.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
3. Задача качественного исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портрет. Бифуркация.
4. Состояния равновесия автономной динамической системы второго порядка. Простое и сложное состояние равновесия.
5. Типы простых состояний равновесия автономной динамической системы второго порядка.
6. Устойчивость траекторий динамических систем. Непрерывная зависимость от начальных условий и параметров.
7. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными различными характеристическими корнями одного знака.
8. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными характеристическими корнями разных знаков.
9. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными равными характеристическими корнями.
10. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с комплексными характеристическими корнями, имеющими не равную нулю действительную часть.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

| Оценка     | Критерии оценивания   |
|------------|---|
| зачтено    | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок |
| не зачтено | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки     |

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М. : Наука, 1967. - 487 с. : черт. -

2.58., 53 экз.

2. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М. : Наука, 1972. - 471 с. - 1.89., 51 экз.

Дополнительная литература:

1. Андронов Александр Александрович. Теория колебаний / с предисл. Л. И. Мандельштама. - 2-е изд. - М. : Наука, 1981. - 568 с. : ил. - 2.60., 274 экз.

2. Бутенин Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний : [учеб. пособие для вузов]. - М. : Наука, 1987. - 382 с. - 1.00., 50 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Киселева Н.В. Компьютерный комплекс по качественной теории дифференциальных уравнений для поддержки самостоятельной работы // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 423-434.

Электронный ресурс: [https://www.j-ets.net/ETS/russian/depository/v21\\_i1/pdf/14.pdf](https://www.j-ets.net/ETS/russian/depository/v21_i1/pdf/14.pdf)

2. Киселева Н.В. Электронный образовательный ресурс по качественно-численным методам исследования неавтономных динамических систем // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 281-292.

<http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/364/301>

#### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Киселева Наталья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Осипов Григорий Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.