

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Метод граничных интегральных уравнений

Уровень высшего образования
Специалитет

Направление подготовки / специальность
01.05.01 - Фундаментальные математика и механика

Направленность образовательной программы
Фундаментальная механика и приложения

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.30 Метод граничных интегральных уравнений относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции) | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции | | Наименование оценочного средства | |
|--|---|---|------------------------------------|------------------------------|
| | Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора) | Результаты обучения по дисциплине | Для текущего контроля успеваемости | Для промежуточной аттестации |
| ОПК-2: Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении | ОПК-2.1: Знает основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования ОПК-2.2: Умеет осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук ОПК-2.3: Имеет практический опыт разработки новых методов математического моделирования для решения задач профессиональной и научной деятельности | ОПК-2.1: Знать основные понятия, математические модели метода граничных интегральных уравнений, современные методы исследования в области решения задач . ОПК-2.2: Уметь создавать и анализировать современные методы решения прикладных задач на основе знаний фундаментальных математических моделей ОПК-2.3: Владеть создания и применения базовых знаний и современного математического аппарата метода граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач. | Собеседование | Зачёт: Контрольная работа |
| ОПК-3: Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной | ОПК-3.1: Знает принципы работы современных информационных технологий ОПК-3.2: Умеет решать задачи профессиональной деятельности с использованием современных информационных | ОПК-3.1: Знать основные понятия, современное программное обеспечение и методы исследования в области решения задач методом граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач | Собеседование | Зачёт: Контрольная работа |

| | | | | |
|--------------|---|---|--|--|
| деятельности | технологий ОПК-3.3: Имеет практический опыт решения задач профессиональной деятельности с использованием современных информационных технологий | ОПК-3.2: Уметь создавать новые и модернизировать известные модели метода граничных интегральных уравнений, анализировать результаты с использованием современного программного обеспечения ОПК-3.3: Владеть применения базовых знаний и современного математического и алгоритмического моделирования при решении прикладных задач методом граничных интегральных уравнений, в том числе в междисциплинарных областях. | | |
|--------------|---|---|--|--|

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

| | |
|--|--------------------------|
| | очная |
| Общая трудоемкость, з.е. | 4 |
| Часов по учебному плану | 144 |
| в том числе | |
| аудиторные занятия (контактная работа): | |
| - занятия лекционного типа | 16 |
| - занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы) | 16 |
| - КСР | 1 |
| самостоятельная работа | 111 |
| Промежуточная аттестация | 0 Зачёт |

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

| Наименование разделов и тем дисциплины | Всего (часы) | в том числе | | | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
|--|--------------|--|---------------------------|-------|---|
| | | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них | | | |
| | | Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Всего | |

| | 0 Ф 0 | 0 Ф 0 | (практические занятия/лабораторные работы), часы | 0 Ф 0 | 0 Ф 0 |
|---|-------------|-------------|--|-------------|-------------|
| | | | | | |
| Состояние вопроса. Базовые математические модели. | 12 | 2 | 2 | 4 | 8 |
| Матрицы фундаментальных и сингулярных решений. | 26 | 3 | 3 | 6 | 20 |
| Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения. | 31 | 4 | 4 | 8 | 23 |
| Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги. | 36 | 4 | 4 | 8 | 28 |
| Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры. | 38 | 3 | 3 | 6 | 32 |
| Аттестация | 0 | | | | |
| КСР | 1 | | | 1 | |
| Итого | 144 | 16 | 16 | 33 | 111 |

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Состояние вопроса. Базовые математические модели.
2. Матрицы фундаментальных и сингулярных решений.
3. Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения.
4. Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги.
5. Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Дополнительная литература:

1. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное обращение преобразования Лапласа: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 34 с. http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_LaplaceTransform.pdf
2. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 43 с.

http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_BoundaryIntegralEquations.pdf

3. Игумнов Л.А., Марков И.П. Применение метода ГИУ для решения краевых динамических упругопластических задач в трехмерной постановке: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 21 с.

<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/124.pdf>

4. Игумнов Л.А., Пазин В.П. Построение матриц Грина и Неймана в трехмерной статической теории упругости с сопряженными полями: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 22 с.

<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/125.pdf>

5. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Фундаментальные решения трехмерной динамической теории пороупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 23 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/126.pdf>

6. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Фундаментальные и сингулярные решения изотропной теории упругости и вязкоупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 18 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/127.pdf>

7. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 2009. 180 с. (20 экз.)

8. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Численное интегрирование быстро осциллирующих функций и его приложения: Учебно-методическое пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2010. 55 с. (20 экз.)

9. Верюжский Ю.В. Метод потенциала в статических задачах строительной механики. - М.: Наука, 1981. (20 экз.)

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

1. Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя.
2. Вывод интегральных уравнений для основных граничных задач теории гармонических функций.
3. Теоремы Фредгольма для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве.
4. Интегральные операторы со слабой особенностью.
5. Разрешимость граничных интегральных уравнений для задач Дирихле и Неймана уравнения Лапласа.
6. Спектральные свойства граничных интегральных операторов.
7. Сингулярные интегральные уравнения. Примеры сингулярных интегральных уравнений.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-3:

1. Граничные интегральные уравнения прямого подхода для уравнения Ламе.
2. Согласованная и изопараметрическая гранично-элементные схемы.

3. Переход от дифференциальных уравнений к интегральным. Пространства основных и обобщенных функций.
4. Построение фундаментального решения для дифференциальных уравнений и переход к интегральным уравнениям.
5. Приближенные методы решения интегральных уравнений. Принцип сжатых отображений.
6. Нахождение собственных чисел и функций интегральных операторов по методу Келлога.
7. Нахождение собственных чисел и функций в случае вырожденных интегральных операторов.
8. Интегральные операторы Гильберта-Шмидта. Операторы с конечной абсолютной нормой. Совпадение этих двух классов интегральных операторов. Теоремы о разложении ядра интегрального оператора в ряд.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

| Оценка | Критерии оценивания |
|---------------------|--|
| превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |
| отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично» |
| очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо» |
| хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо» |
| удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо» |
| плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

| Уровень сформированности компетенций | плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
|--------------------------------------|-------|---------------------|-------------------|--------|--------------|---------|-------------|
| | | не зачтено | | | зачтено | | |

| | | | | | | | |
|-------------------------------|---|--|--|---|--|---|--|
| (индикатор достижения) | | | | | | | |
| <u>Знания</u> | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет. | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. |
| <u>Умения</u> | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки | Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u> | Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов | Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов | Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач |

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

| Оценка | | Уровень подготовки |
|---------|---------------------|--|
| зачтено | превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой |
| | отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично». |
| | очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо» |

| | | |
|-------------------|----------------------------|--|
| | хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо». |
| | удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно». |
| | плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Выведите оператор Набла для в полярных координат r и φ , где соотношения между единичными векторами e_r и e_φ полярной системы координат и единичными векторами e_1 и e_2 декартовой системы координат следующие:

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \hat{e}_r \cos \varphi - \hat{e}_\varphi \sin \varphi \\ \hat{e}_2 &= \hat{e}_r \sin \varphi + \hat{e}_\varphi \cos \varphi\end{aligned}$$

2. Определить оператор Лапласа, т. е. скалярное произведение вектора набла на самого себя в полярных координатах

3. Вычислите по частям интеграл

$$\int_a^b x^n \ln(x) dx$$

4. Вычислите по частям интеграл в области R^2

$$\int_0^R r^n \ln(r) d\Omega$$

где

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \mid r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq R \right\} :$$

5. Проверьте соотношение

$$\int_a^x \left[\int_a^s G(\bar{x}, s) d\bar{x} \right] ds = \int_a^x \left[\int_{\bar{x}}^x G(\bar{x}, s) ds \right] d\bar{x}$$

для случая

$$G(\bar{x}, s) = \bar{x}^3 s$$

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-3

1. Смените порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_a^x \left[\int_s^b G(\bar{x}, s) d\bar{x} \right] ds, \quad x \in [a, b].$$

и проверьте полученное соотношение для случая

$$G(\bar{x}, s) = \bar{x}^3 s.$$

2. Для краевой задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = f(x)$$

$$y(a) = y_0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{d}{dx} y(x) \right|_{x=b} = y'(b) = y'_1$$

выведите решение путем прямого интегрирования и преобразуйте полученный двойной интеграл в одинарные интегралы, применяя формулу.

3. Запишите решение системы, соответствующей краевой задаче об изгибе балки,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & l \\ -1 & -l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(a) \\ w'(a) \\ w(b) \\ w'(b) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2EI} \int_a^b \begin{bmatrix} (x-a)M(x) \\ (b-x)M(x) \end{bmatrix} dx$$

при краевых условиях

$$w(a) = \tilde{w}_0 \quad \text{and} \quad w'(b) = w'_1$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

| Оценка | Критерии оценивания |
|---------|---|
| зачтено | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок |

| Оценка | Критерии оценивания |
|------------|---|
| не зачтено | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки |

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / Баженов В.Г., Игумнов Л.А. - Москва : Физматлит, 2008., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=645914&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Бреббиа Карл. Методы граничных элементов / пер. с англ. Л. Г. Корнейчука ; под ред. Э. И. Григолюка. - М. : Мир, 1987. - 524 с. ил. - 3.60., 3 экз.
2. Партон Владимир Залманович. Интегральные уравнения теории упругости. - М. : Наука, 1977. - 311 с. : ил. - 1.60., 1 экз.
3. Рябенький Виктор Соломонович. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. - М. : Наука, 1987. - 319, [1] с. : ил. - 3.70., 2 экз.
4. Угодчиков Андрей Григорьевич. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. - Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1986. - 294, [1] с. : граф. - 3.00., 28 экз.
5. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / Баженов В.Г., Игумнов Л.А. - Москва : Физматлит, 2008., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=645914&idb=0>.
6. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / под ред. В. И. Смирнова, Х. Л. Смолицкого. - [Б. м.] : [б. и.], [19--]. - 416 с. - 13.15., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>
2. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ie.htm>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: проектор, экран

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.05.01 - Фундаментальные математика и механика.

Автор(ы): Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.