

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Метод граничных интегральных уравнений

Уровень высшего образования

Специалитет

Направление подготовки / специальность

01.05.01 - Фундаментальные математика и механика

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.30 Метод граничных интегральных уравнений относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-2: Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1: Знает основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования ОПК-2.2: Умеет осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук ОПК-2.3: Имеет практический опыт разработки новых методов математического моделирования для решения задач профессиональной и научной деятельности	ОПК-2.1: Знать основные понятия, математические модели метода граничных интегральных уравнений, современные методы исследования в области решения задач . ОПК-2.2: Уметь создавать и анализировать современные методы решения прикладных задач на основе знаний фундаментальных математических моделей ОПК-2.3: Владеть создания и применения базовых знаний и современного математического аппарата метода граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач.	Собеседование	Зачёт: Контрольная работа
ОПК-3: Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной	ОПК-3.1: Знает принципы работы современных информационных технологий ОПК-3.2: Умеет решать задачи профессиональной деятельности с использованием современных информационных	ОПК-3.1: Знать основные понятия, современное программное обеспечение и методы исследования в области решения задач методом граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач	Собеседование	Зачёт: Контрольная работа

деятельности	технологий ОПК-3.3: Имеет практический опыт решения задач профессиональной деятельности с использованием современных информационных технологий	ОПК-3.2: Уметь создавать новые и модернизировать известные модели метода граничных интегральных уравнений, анализировать результаты с использованием современного программного обеспечения ОПК-3.3: Владеть применения базовых знаний и современного математического и алгоритмического моделирования при решении прикладных задач методом граничных интегральных уравнений, в том числе в междисциплинарных областях.		
--------------	---	---	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	1
самостоятельная работа	111
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Всего	

			(практические занятия/лабораторные работы), часы		
	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О
Состояние вопроса. Базовые математические модели.	12	2	2	4	8
Матрицы фундаментальных и сингулярных решений.	26	3	3	6	20
Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения.	31	4	4	8	23
Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги.	36	4	4	8	28
Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры.	38	3	3	6	32
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	144	16	16	33	111

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Состояние вопроса. Базовые математические модели.
2. Матрицы фундаментальных и сингулярных решений.
3. Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения.
4. Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги.
5. Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Дополнительная литература:

1. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное обращение преобразования Лапласа: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 34 с.
http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_LaplaceTransform.pdf
2. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 43 с.

http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_BoundaryIntegralEquations.pdf

3. Игумнов Л.А., Марков И.П. Применение метода ГИУ для решения краевых динамических упругопластических задач в трехмерной постановке: Электронное методическое пособие.

Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 21 с.

<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/124.pdf>

4. Игумнов Л.А., Пазин В.П. Построение матриц Грина и Неймана в трехмерной статической теории упругости с сопряженными полями: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 22 с.

<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/125.pdf>

5. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Фундаментальные решения трехмерной динамической теории пороупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 23 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/126.pdf>

6. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Фундаментальные и сингулярные решения изотропной теории упругости и вязкоупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 18 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/127.pdf>

7. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 2009. 180 с. (20 экз.)

8. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Численное интегрирование быстро осциллирующих функций и его приложения: Учебно-методическое пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2010. 55 с. (20 экз.)

9. Верюжский Ю.В. Метод потенциала в статических задачах строительной механики. - М.: Наука, 1981. (20 экз.)

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

1. Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя.
2. Вывод интегральных уравнений для основных граничных задач теории гармонических функций.
3. Теоремы Фредгольма для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве.
4. Интегральные операторы со слабой особенностью.
5. Разрешимость граничных интегральных уравнений для задач Дирихле и Неймана уравнения Лапласа.
6. Спектральные свойства граничных интегральных операторов.
7. Сингулярные интегральные уравнения. Примеры сингулярных интегральных уравнений.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-3:

1. Граничные интегральные уравнения прямого подхода для уравнения Ламе.
2. Согласованная и изопараметрическая гранично-элементные схемы.

3. Переход от дифференциальных уравнений к интегральным. Пространства основных и обобщенных функций.
4. Построение фундаментального решения для дифференциальных уравнений и переход к интегральным уравнениям.
5. Приближенные методы решения интегральных уравнений. Принцип сжатых отображений.
6. Нахождение собственных чисел и функций интегральных операторов по методу Келлога.
7. Нахождение собственных чисел и функций в случае вырожденных интегральных операторов.
8. Интегральные операторы Гильберта-Шмидта. Операторы с конечной абсолютной нормой. Совпадение этих двух классов интегральных операторов. Теоремы о разложении ядра интегрального оператора в ряд.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			

(индикатор достижения)							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»

	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Выведите оператор Набла для в полярных координат r и φ , где соотношения между единичными векторами e_r и e_φ полярной системы координат и единичными векторами e_1 и e_2 декартовой системы координат следующие:

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \hat{e}_r \cos \varphi - \hat{e}_\varphi \sin \varphi \\ \hat{e}_2 &= \hat{e}_r \sin \varphi + \hat{e}_\varphi \cos \varphi\end{aligned}$$

2. Определить оператор Лапласа, т. е. скалярное произведение вектора набла на самого себя в полярных координатах

3. Вычислите по частям интеграл

$$\int_a^b x^n \ln(x) dx$$

4. Вычислите по частям интеграл в области R^2

$$\int_0^R r^n \ln(r) d\Omega$$

где

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \mid r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq R \right\} :$$

5. Проверьте соотношение

$$\int_a^x \left[\int_a^s G(\bar{x}, s) d\bar{x} \right] ds = \int_a^x \left[\int_{\bar{x}}^x G(\bar{x}, s) ds \right] d\bar{x}$$

для случая

$$G(\bar{x}, s) = \bar{x}^3 s$$

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-3

1. Смените порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_a^x \left[\int_s^b G(\bar{x}, s) d\bar{x} \right] ds, \quad x \in [a, b].$$

и проверьте полученное соотношение для случая

$$G(\bar{x}, s) = \bar{x}^3 s.$$

2. Для краевой задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = f(x)$$

$$y(a) = y_0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{d}{dx} y(x) \right|_{x=b} = y'(b) = y_1$$

выведите решение путем прямого интегрирования и преобразуйте полученный двойной интеграл в одинарные интегралы, применяя формулу.

3. Запишите решение системы, соответствующей краевой задаче об изгибе балки,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & l \\ -1 & -l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(a) \\ w'(a) \\ w(b) \\ w'(b) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2EI} \int_a^b \begin{bmatrix} (x-a)M(x) \\ (b-x)M(x) \end{bmatrix} dx$$

при краевых условиях

$$w(a) = \tilde{w}_0 \quad \text{and} \quad w'(b) = w'_1$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок

Оценка	Критерии оценивания
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / Баженов В.Г., Игумнов Л.А. - Москва : Физматлит, 2008., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=645914&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Бреббия Карл. Методы граничных элементов / пер. с англ. Л. Г. Корнейчука ; под ред. Э. И. Григолюка. - М. : Мир, 1987. - 524 с. ил. - 3.60., 3 экз.
2. Партон Владимир Залманович. Интегральные уравнения теории упругости. - М. : Наука, 1977. - 311 с. : ил. - 1.60., 1 экз.
3. Рябенский Виктор Соломонович. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. - М. : Наука, 1987. - 319, [1] с. : ил. - 3.70., 2 экз.
4. Угодчиков Андрей Григорьевич. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. - Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1986. - 294, [1] с. : граф. - 3.00., 28 экз.
5. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / Баженов В.Г., Игумнов Л.А. - Москва : Физматлит, 2008., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=645914&idb=0>.
6. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / под ред. В. И. Смирнова, Х. Л. Смолицкого. - [Б. м.] : [б. и.], [19--]. - 416 с. - 13.15., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>
2. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ie.htm>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: проектор, экран

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.05.01 - Фундаментальные математика и механика.

Автор(ы): Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.