

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

*Математические методы
нелинейной динамики*

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.01 Математика

Направленность образовательной программы
Общий профиль

Форма обучения
Очная

Нижний Новгород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части, Б1.О.30

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.0.30, «Математические методы нелинейной динамики», относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.01 Математика

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-2 Способен выполнять фундаментальные и прикладные естественнонаучные работы поискового и теоретического и характера	ПК-2.1.: Знает методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в соответствующей области исследований	Знать методы математически корректной постановки естественнонаучных задач, постановок классических задач методов нелинейной динамики	собеседование
	ПК-2.2.: Умеет решать задачи аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	Уметь использовать на практике для решения конкретных задач базовые знания в области математического программирования, вариационного исчисления и методов оптимизации, математические алгоритмы методов нелинейной динамики	задачи
	ПК-2.3.: Владеет методами выполнения работ поискового и теоретического характера	Владеть методами нахождения, анализа, реализации и использования на практике математических алгоритмов методов нелинейной динамики	задачи

ПК-3 Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках	ПК-3.1.: Знает классические математические модели задач естествознания, численные методы решения базовых математических задач, математические методы обработки информации	Знать классические постановки задач математических методов нелинейной динамики	собеседование
	ПК-3.2.: Умеет самостоятельно и корректно решать задачи естественнонаучного содержания, корректно использовать математические методы в конкретной предметной области, применять численные методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности	Уметь самостоятельно и корректно использовать методы формализации практических и естественнонаучных задач математических методов нелинейной динамики	задачи
	ПК-3.3.: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований или производственной деятельности	Владеть навыками самостоятельного использования методов формализации практических и естественнонаучных задач, возникающих из потребностей обработки результатов экспериментальных исследований или производственной деятельности математических методов нелинейной динамики	задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ

Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	33
- занятия семинарского типа	33
самостоятельная работа	42
Промежуточная аттестация – экзамен	36

3.2. Содержание дисциплины Математические методы нелинейной динамики

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	в том числе				
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				Самостоятельная работа студента часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные	Всего контактных часов	СРС
Тема1. Введение. Динамические системы, основные понятия. Примеры задач из физики, механики, биологии, экономики, приводящие к понятию «динамическая система». Динамические системы с непрерывным временем (системы дифференциальных уравнений) и с дискретным временем (отображения). Устойчивость тривиального решения. Второй метод Ляпунова. Устойчивость состояния равновесия по линейному приближению. Общая классификация состояний равновесия многомерных систем	12	4	4		8	4
Тема 2. Качественные методы анализа двумерных динамических систем. Тождественность топологических структур. Особые траектории и ячейки динамических систем. Основные понятия (фазовое пространство, фазовая кривая, состояние равновесия, векторное поле, особые точки). Классификация простых состояний равновесия. Сложные состояния равновесия. Предельные циклы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых кривых. Индексы	12	4	4		8	4

состояний равновесия (особых точек векторного поля). Поведение траекторий на бесконечности. Особые траектории и ячейки динамических систем. Понятие грубости динамической системы. Необходимые и достаточные условия грубости. Примеры анализа двумерных динамических систем.						
Тема 3. Элементы теории бифуркаций двумерных ДС. Понятие грубости (структурной устойчивости). Необходимые и достаточные условия грубости.	4	2	2		4	0
Тема 4. Консервативные системы с одной степенью свободы. Системы с одной степенью свободы (интегралы, фазовый портрет). Теорема Лагранжа-Дирихле и обратная теорема Ляпунова. Построение решений уравнений с одной степенью свободы. Эллиптические интегралы и функции. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = 0$. Приложение к задаче о стационарных волновых решениях уравнения КДВ. Приложение к задаче Кеплера о движении частицы в поле тяготения. Обобщение на произвольные двумерные системы Гамильтона. Задача Вольтерра.	18	6	6		12	6
Тема 5. Консервативные трехмерные автономные системы. Уравнения Эйлера движения асимметричного волчка. Построение решений. Уравнения гидродинамического типа. Метод Галеркина. Триплет Обухова. Уравнения динамики квантового генератора и система Лоренца. Интегрируемые случаи.	14	4	4		8	6
Тема 6. Многомерные системы Гамильтона. Интегрируемость. Метод Якоби-Гамильтона. Теорема Пуассона. Теоремы Лиувилля и Арнольда. Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Пример: $\ddot{x} + x + x^3 = 0$. Условно периодические движения. Пространственное и временное средние. Неинтегрируемые гамильтоновы системы. Теория КАМ.	10	2	2		4	6
Тема 7. Квазиконсервативные автономные системы. Метод усреднения. Теоремы Боголюбова. Асимптотический метод Крылова-Боголюбова (на примере уравнения $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$). Применение метода усреднения для анализа уравнения $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$. Пример анализа уравнения $\ddot{x} + x = \mu(a + bx^2)\dot{x}$ методом усреднения. Метод малого параметра Пуанкаре. Пример: уравнение Ван дер Поля. Мягкий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда. Жесткий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда.	20	6	6		12	8

Метод усреднения для квазигамильтоновых существенно нелинейных двумерных автономных систем. Существование предельных циклов. Теорема Пуанкаре-Понтрягина и ее обобщение. Возможные типы фазовых портретов для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon(d - x^2)\dot{x}$. Разрывные колебания. Метод точечных отображений. Диаграмма Ламерея и теорема Кенигса. Пример определения						
Тема 8. Неавтономные периодические по времени системы. Вынужденные колебания в линейных системах. Применение метода усреднения в резонансном случае для анализа уравнений вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mathcal{E}f(x, \dot{x}, vt)$. Применение метода усреднения для анализа уравнения $\ddot{x} + x = \varepsilon(ax^3 + dx + b\dot{x} + c \sin(t))$ Синхронизация колебаний на примере уравнения $\ddot{x} + x = \varepsilon(dx + (1 - x^2)\dot{x} + c \cos(t))$. Параметрические системы. Основы теории Флоке. Резонансы в существенно нелинейных квазигамильтоновых системах. Усреднение в резонансном случае. Возможные типы резонансных зон в существенно нелинейных квазигамильтоновых системах. Анализ резонансных зон на примере уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon((d - x^2)\dot{x} + c \sin(vt))$	17	4	4		8	8
Итого	108	33	33		66	42
Промежуточная аттестация – экзамен						

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа, индивидуальных консультаций.

Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (экзамен), в иных формах (контрольная работа).

Практическая подготовка предусматривает выполнение проекта, решение прикладной задачи кейса.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

4.1 Виды самостоятельной работы студентов

- ❖ Проработка лекционного материала.
- ❖ Решение примеров из списка вопросов по курсу.
- ❖ Выполнение контрольной работы

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 6.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые	Имеется минимальный набор навыков для решения	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных

	наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	навыки. Имели место грубые ошибки.	стандартных задач с некоторыми недочетами	задач с некоторыми недочетами	задач без ошибок и недочетов.	ошибок и недочетов.	ых задач
--	--	---------------------------------------	---	-------------------------------	-------------------------------	---------------------	----------

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения.

6.2.1 Контрольные вопросы

Тема 1. Введение. Динамические системы, основные понятия

1. Простейшие примеры задач динамики (грузик на пружине, колебательный контур, маятник). ПК-3
2. Динамические системы: основные понятия, классификация, пример. ПК-3
3. Устойчивость состояния равновесия. Второй метод Ляпунова. ПК-2
4. Устойчивость состояния равновесия по линейному приближению. ПК-2
- Критерий Гурвица. ПК-3
5. Типы простых состояний равновесия в многомерных системах. ПК-2
- Тема 2. Качественные методы анализа двумерных динамических систем.**
6. Основные понятия. Особые траектории и ячейки динамических систем. ПК-3
7. Классификация простых состояний равновесия. ПК-2
8. Направление стремления фазовых кривых к простому состоянию равновесия. ПК-2
- Сложные состояния равновесия. Пример.
9. Предельные циклы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых кривых. ПК-2
10. Индексы особых точек. ПК-2
11. Поведение траекторий на бесконечности. ПК-2
12. Примеры анализа динамических систем (в билете будет один из примеров, рассмотренных в лекциях). ПК-3
13. Элементы теории бифуркаций двумерных ДС. ПК-3
- Тема 3. Интегрируемые системы с одной степенью свободы. ПК-2**
14. Системы с одной степенью свободы (интегралы, фазовый портрет).
15. Теорема Лагранжа-Дирихле и обратная теорема Ляпунова.
16. Построение решений уравнений с одной степенью свободы. Эллиптические интегралы и функции.
17. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = 0$.
18. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + x - x^3 = 0$.
19. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$.
20. Сравнение свойств решений уравнений $\ddot{x} + x \pm x^3 = 0$, $\ddot{x} + x = 0$.
21. Приложение к задаче о стационарных волновых решениях уравнения КДВ.
22. Приложение к задаче Кеплера о движении частицы в поле тяготения.
- Тема 4. Интегрируемые трехмерные системы. ПК-2**
23. Трехмерные системы. Уравнения движения асимметричного волчка и их решение.
24. Уравнения гидродинамического типа.
25. Уравнения динамики квантового генератора и система Лоренца. Интегрируемый случай. Построение решений (сведение к квадратурам).
- Тема 5. Многомерные Гамильтоновы системы. ПК-3**
26. Интегрируемость. Метод Якоби-Гамильтона.
27. Теоремы Пуассона, Лиувилля и Арнольда.
28. Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Пример: $\ddot{x} + x + x^3 = 0$.
29. Условно периодические движения. Пространственное и временное средние.
30. Неинтегрируемые гамильтоновы системы. Основы теории КАМ.
- Тема 6. Квазиинтегрируемые (квазиконсервативные) автономные системы. ПК-2**
31. Принцип усреднения. Пример.
32. Метод усреднения. Первая теорема Боголюбова.
33. Метод Пуанкаре. Периодические решения в уравнении $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$.
34. Анализ уравнения методом усреднения.
35. Пример анализа уравнения $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$ методом усреднения.
36. Мягкий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда.
37. Жесткий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда.

38. Метод усреднения для двумерных автономных систем, близких к нелинейным гамильтоновым.
39. Существование предельных циклов для двумерных автономных систем, близких к нелинейным гамильтоновым. Теорема Пуанкаре-Понтрягина и ее обобщение.
40. Пример: исследовать уравнение $\ddot{x} + x + x^3 = \mu(d - x^2)\dot{x}$
41. Метод точечных преобразований. Диаграмма Ламерея и теорема Кенигса. Пример.
42. Разрывные колебания.

Тема 7. Квазиинтегрируемые (квазиконсервативные) неавтономные системы. ПК-2

43. Вынужденные колебания в линейных системах.
44. Вынужденные колебания на примере уравнения.
45. Роль нелинейности на примере уравнения.
46. Синхронизация колебаний на примере уравнения: $\ddot{x} + x = \mu[(1 - x^2)\dot{x} + dx + c \cos(vt)]$
47. Параметрические системы.
48. Резонансы в существенно нелинейных системах. Усреднение в резонансном случае.
49. Возможные типы резонансных зон.
50. Структура резонансных зон для уравнения $\ddot{x} + x - x^3 = \mu(dx + c \sin(vt))$, где d, c, V - параметры.

6.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции - не предполагаются.

6.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции_ПК-2_____

6.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции_ПК-3_____

Пример экзаменационного билета

Нижегородский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

Кафедра ДУМЧА Дисциплина Математические методы
нелинейной динамики

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Простейшие примеры задач динамики (грузик на пружине, колебательный контур, маятник).
2. Классификация простых состояний равновесия.
3. Вынужденные колебания на примере уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}, vt)$.

Зав. кафедрой _____
Экзаменатор _____

6.2.4. Темы контрольных работ

1. Для предлагаемого набора двумерных динамических систем решить вопрос об устойчивости состояния равновесия. Примеры систем см., например, в пособии «Динамические системы». Часть 1. Учебно-методический комплекс. Сост. А.Д. Морозов.-Н.Новгород: ННГУ, 2002, 32 с. (ПК-2)

2. Построить фазовые портреты для конкретных двумерных динамических систем. Качественное исследование трехмерной системы Лоренца. (ПК-2)
3. Построение решений уравнений Дюффинга, маятникового типа, уравнений с квадратичной нелинейностью. (ПК-2)
4. Построение решений для интегрируемой системы, описывающей одномодовый квантовый генератор. (ПК-2)
5. Исследование уравнения Ван дер Поля методом усреднения. (ПК-3)
6. Доказательство теоремы о максимальном числе предельных циклов при алгебраическом возмущении линейного осциллятора. (ПК-3)
7. Качественное исследование автономных возмущенных уравнений Дюффинга и маятника. (ПК-3)
8. Качественное исследование периодических по времени возмущений уравнений Дюффинга и маятника. (ПК-3)

Формулируются 4 варианта контрольной работы по две задачи в каждом варианте.

Превосходно: 98-100 баллов	Решены обе задачи без замечаний.
Отлично: 91-97	Решены обе задачи с незначительными пометками.
Очень хорошо: 80-90	Решены обе задачи с замечаниями.
Хорошо: 60-79	Решена одна задача без замечаний. Другая задача решена не полностью.
Удовлетворительно: 50-59	Решена одна задача без замечаний. Другая задача не решена.
Неудовлетворительно: 20-49	Не решены обе задачи.
Плохо: 0-19	Работа не представлена преподавателю.

Примеры вариантов контрольной работы.

$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = -y + x^2 y$ Исследовать на устойчивость состояние равновесия	$\ddot{x} + \sin(x) = 0$ Найти $x(t)$
---	--

$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon(a + bx - x^2)y, \quad a, b - \text{параметры}$ Построить фазовые портреты	$\ddot{x} + x + x^3 = 0$ Найти $x(t)$
---	--

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Морозов А.Д. Математические методы теории колебаний: учебное пособие.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2017.-144 с. (10 экз. в библиотеке ННГУ).
2. Морозов А.Д. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ. Электронное учебно- методическое пособие.-Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012.– 98 с. Рег. № 480.12.06.

б) дополнительная литература:

3. Морозов А.Д. Д Глобальный анализ в теории нелинейных колебаний: монография. - Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1995 г. - 292 с. 4 экз.
4. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. Учебное пособие.-Красноярск: Изд-во Красноярского университета, 1995.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины)

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Математические методы нелинейной динамики (МАТЕМАТИКА 4 к.)»,

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6848>

созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>

Программа WInSet (Драгунов Т.Н., Морозов А.Д. Использование программы WInSet для визуализации динамических систем: Учебное пособие.-Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.-102 с., <http://www.unn.ru/pages/e-library/aids/2007/41.pdf>).

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные компьютером, проектором и экраном. Это позволяет использовать презентации по курсу «Математические методы нелинейной динамики».

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ.

Автор Морозов А.Д.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой Калинин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.