

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Векторный и тензорный анализ

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
03.03.02 - Физика

Направленность образовательной программы
Медицинская физика

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.08.06 Векторный и тензорный анализ относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности;	ИД ОПК-1: Демонстрация способности применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ИД ОПК-1: Знать основные теоретические положения, теоремы векторного анализа, правила преобразования тензорных величин, свойства и правила обращения с тензором Леви-Чивита и тензором Кронекера, определения и способы расчета градиента скалярной функции, дивергенции и ротора векторного поля.	Аудиторная контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы Задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
самостоятельная работа	23
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
1. Векторная алгебра. Понятие линейного (векторного) пространства. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Декартова систем координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Преобразование компонент вектора при повороте системы координат. Матрица поворота и ее свойства	10	2	4	6	4
2. Тензорная алгебра. Определение тензора. Ранг тензора. Сложение, умножение тензоров. Свертка. Скалярное умножение тензоров. Теорема деления	11	3	4	7	4
3. Приложения теории тензоров. Симметрия тензоров. Инвариантность тензорных соотношений. Тензор поляризации, тензор механических напряжений, тензор инерции. Главные оси и главные значения тензора. Тензорная поверхность. Инварианты тензоров второго ранга. Изотропные тензоры. Тензор Леви-Чивита. Векторное, двойное векторное и смешанное произведения в тензорной форме	26	5	12	17	9
4. Тензорные поля. Градиент, ротор и дивергенция. Понятия потенциального и вихревого полей. Дифференциальные операции 2-го порядка, оператор Лапласа. Интегральные теоремы векторного анализа. Векторные тождества	17	4	10	14	3
5. Криволинейные системы координат. Криволинейные системы координат, сферические и цилиндрические координаты. Коэффициенты Ламе. Метрический тензор. Якобиан. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах	7	2	2	4	3
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	16	32	49	23

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Понятие линейного (векторного) пространства. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Декартова систем координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Преобразование компонент вектора при повороте системы координат. Матрица поворота и ее свойства
2. Определение тензора. Ранг тензора. Сложение, умножение тензоров. Свертка. Скалярное умножение тензоров. Теорема деления
3. Симметрия тензоров. Инвариантность тензорных соотношений. Тензор поляризации, тензор механических напряжений, тензор инерции. Главные оси и главные значения тензора. Тензорная поверхность. Инварианты тензоров второго ранга. Изотропные тензоры. Тензор Леви-Чивита. Векторное, двойное векторное и смешанное произведения в тензорной форме
4. Градиент, ротор и дивергенция. Понятия потенциального и вихревого полей. Дифференциальные

операции 2-го порядка, оператор Лапласа. Интегральные теоремы векторного анализа. Векторные тождества

5. Криволинейные системы координат, сферические и цилиндрические координаты. Коэффициенты Ламе. Метрический тензор. Якобиан. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Векторный и тензорный анализ, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=11196>.

Иные учебно-методические материалы:

Максимова Г.М., Малышев А.И., Тележников А.В. Основы векторного и тензорного анализа для физиков. Учебное пособие. Н.Новгород: Издательство ННГУ. 2022. 125 с.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Вариант 1

Задание 1

В исходной системе координат задан вектор $A_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. В системе координат, повернутой относительно исходной вокруг оси Ox на угол $\frac{\pi}{6}$, задан вектор $B'_j = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найдите свертку $A_k B_k$.

Задание 2

Даны тензоры $T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Вычислите свертки:

1. $B_k \varepsilon_{kij} + 2A_i A_k B_k B_j$
2. $Sp(A_k \delta_{pk} \varepsilon_{ijp} + A_n T_{ji} A_n)$

Задание 3

Вычислить:

- 1) $grad(r \cdot (\vec{a}, \vec{r})^3)$, ($\vec{a}$ - постоянный вектор)
- 2) $div(\vec{r}/\sqrt{r^2 + a^2})$
- 3) $rot(\vec{a} \cdot e^{-r^2/a^2})$

Вариант 2

Задание 1

В исходной системе координат задан тензор $A_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Вычислите его компоненты в системе координат, повернутой относительно исходной вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{3}$.

Задание 2

Даны тензоры $T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $D_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Вычислите свертки:

1. $D_n D_m D_n + 3D_n T_{nm}$
2. $\varepsilon_{ijk} T_{kj} D_i - Sp(D_m D_n)$

Задание 3

Вычислить:

$$1) \operatorname{grad} (tg(\vec{a}, \vec{r})), (\vec{a} - \text{постоянный вектор})$$

$$2) \operatorname{div} (\vec{a} \cdot (\vec{a}, \vec{r})^4 / r)$$

$$3) \operatorname{rot} (\vec{r} \cdot (\vec{a}, \vec{r})^n)$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Обучаемый успешно решил более половины задач из контрольной работы
не зачтено	Обучаемый успешно решил менее половины задач из контрольной работы

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

			полном объеме	объеме, но некоторые с недочетами	с недочетами .	недочетам и, выполнен ы все задания в полном объеме	
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Запишите прямой и обратный закон преобразования компонент вектора при повороте декартовой системы координат.
2. Сформулируйте правило Эйнштейна.
3. Какие тензоры называют симметричными; антисимметричными?

4. Что можно сказать о собственных значениях симметричного тензора II ранга?
5. Приведите примеры изотропных тензоров I, II, III рангов.
6. Для чего нужен тензор инерции? Какие у него свойства?
7. Дайте определение градиента скалярного, дивергенции и ротора векторного поля через оператор «набла».
8. Какие поля называют потенциальными; вихревыми?
9. Для чего нужны коэффициенты Ламэ?

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Обучаемый правильно ответил более, чем на половину контрольных вопросов
не зачтено	Обучаемый правильно ответил менее, чем на половину контрольных вопросов

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Задача 1.

В исходной системе координат задан тензор $C_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. В системе координат, повернутой относительно исходной вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{2}$, задан вектор $F'_j = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Вычислите $F_i C_{ik} F_k$.

Задача 2.

В исходной системе координат задан вектор $A_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. В системе координат, повернутой относительно исходной вокруг оси Ox на угол $\frac{\pi}{6}$, задан вектор $B'_j = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найдите свертку $A_k B_k$.

Задача 3.

В исходной системе координат задан тензор $A_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Вычислите его компоненты в системе координат, повернутой относительно исходной вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{3}$.

Задача 4.

В исходной системе координат задан тензор $A_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Вычислите его компоненты в системе координат, повернутой относительно исходной вокруг оси Ox на угол $\frac{\pi}{3}$.

Задача 5.

Даны тензоры $T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Вычислите свертки:

1. $Sp(T_{mn}\delta_{kk} - \varepsilon_{imn}A_i)$
2. $A_k T_{ik} \varepsilon_{ijp} + B_j A_p \delta_{zs} T_{zs}$

Задача 6.

Даны тензоры: $C_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $F_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Вычислите свертки:

- 1) $Sp(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kim} + F_{ij} + F_{ji})$
- 2) $C_{kj}C_{fk}F_{jw}\varepsilon_{fsw}$

Задача 7.

Даны тензоры $T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $D_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Вычислите свертки:

1. $D_n D_m D_n + 3D_n T_{nm}$
2. $\varepsilon_{ijk} T_{kj} D_i - Sp(D_m D_n)$

Задача 8.

Даны тензоры $M_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Вычислите свертки:

1. $A_n \delta_{ni} + \varepsilon_{pik} M_{pk}$
2. $Sp(\delta_{ij} M_{ij} A_k A_s + \varepsilon_{kis} A_i)$

Задача 9.

- 1) $grad(r \cdot [\vec{a}, \vec{r}]^2)$, ($\vec{a}$ - постоянный вектор)
- 2) $div(\vec{r}/r^2 + \vec{a}/(\vec{a}, \vec{r}))$
- 3) $rot((\vec{r} + \vec{a}) \cdot e^{-r/a})$

Задача 10.

- 1) $grad(r^4 \cdot e^{(\vec{a}, \vec{r})})$, ($\vec{a}$ - постоянный вектор)
- 2) $div(\vec{r} \cdot (\vec{a}, \vec{r}) \cdot \cos(a \cdot r))$
- 3) $rot(\vec{r} \cdot \sin(\vec{a}, \vec{r}))$

Задача 11.

- 1) $grad(ch(r \cdot (\vec{a}, \vec{r})))$, ($\vec{a}$ - постоянный вектор)
- 2) $div(\vec{a} \cdot ((\vec{a}, \vec{r})^3 + 1))$
- 3) $rot(\vec{r} \cdot \sin^2(\vec{a}, \vec{r}))$

Задача 12.

- 1) $grad(sh(a/r))$, ($\vec{a}$ - постоянный вектор)
- 2) $div(\vec{r} \cdot (r^2 + a^2)^{1/3})$
- 3) $rot(\vec{a}/(r^2 + a^2))$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Обучаемый успешно решил более половины задач из контрольной работы
не зачтено	Обучаемый успешно решил менее половины задач из контрольной работы

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Максимова Галина Михайловна. Основы векторного и тензорного анализа для физиков : учеб. пособие / Г. М. Максимова, А. И. Малышев, А. В. Тележников ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2022. - 126 с. - ISBN 978-5-91326-780-1., 100 экз.
2. Батыгин Владимир Владимирович. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности : учеб. пособие. - Изд. 4-е, перераб. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2010. - 480 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0921-1 : 728.20., 40 экз.

Дополнительная литература:

1. Борисенко Александр Иванович. Векторный анализ и начала тензорного исчисления : [учеб. пособие для студентов вузов]. - Изд. 3-е. - М. : Высшая школа, 1966. - 252 с. : черт. - 0.63., 7 экз.
2. Кочин Николай Евграфович. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - Изд. 9-е. - М. : Наука, 1965. - 426 с. : черт. - 1.90., 4 экз.
3. Амензаде Юсиф Аменович. Теория упругости : учеб. для студентов мех.-мат. фак. ун-тов. - 3-е изд., доп. - М. : Высшая школа, 1976. - 272 с. - 37.52., 6 экз.
4. Левич Вениамин Григорьевич. Курс теоретической физики : для физ.-техн. вузов и фак. : в 2 т. Т. 1 : Теория электромагнитного поля. Теория относительности. Статистическая физика. - М. : Наука, 1962. - 695 с. - 1.30., 12 экз.
5. Будак Борис Михайлович. Кратные интегралы и ряды : [для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов]. - М. : Наука, 1965. - 607 с. : с черт. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова [и др.], вып. 2). - 1.20., 16 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Не используется

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки/специальности 03.03.02 - Физика.

Автор(ы): Тележников Алексей Валентинович, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Бурдов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 30.11.2024, протокол № б/н.