

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Действительный анализ

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.23 Действительный анализ относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-4: Способен собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать передовой отечественный и международный опыт в математической и информационной области исследований	<p>ПК-4.1: Знает методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в математической и информационной области исследований</p> <p>ПК-4.2: Умеет применять новые достижения в области научно-технической информации</p> <p>ПК-4.3: Владеет навыками решения задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач</p>	<p>ПК-4.1: Знать методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в математической и информационной области исследований.</p> <p>ПК-4.2: Уметь применять методы анализа научно-технической информации.</p> <p>ПК-4.3: Владеть навыками решения задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач.</p>	Контрольная работа Собеседование	Экзамен: Контрольные вопросы

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32

- КСР	2
самостоятельная работа	22
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
Ф	Ф	Ф	Ф	Ф	
Тема 1. Возникновение действительного и функционального анализа как самостоятельного раздела математики; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.	8	2	4	6	2
Тема 2. Счетные множества и множества мощности континуума. Множества, алгебра множеств	9	2	4	6	3
Тема 3. Построение меры Лебега на прямой	9	2	4	6	3
Тема 4. Общее понятие аддитивной меры; лебеговское продолжение меры	9	2	4	6	3
Тема 5. Измеримые функции их свойства; определение интеграла Лебега; класс суммируемых функций	8	2	4	6	2
Тема 6. Предельный переход под знаком интеграла Лебега с интегралом Римана; интеграл Стильбеса	9	2	4	6	3
Тема 7. Теорема Радона – Никодима; прямое произведение мер и теорема Фубини	9	2	4	6	3
Тема 8. Пространства $L_1, L_p (p > 1)$ ; неравенства Гельдера и Минковского	9	2	4	6	3
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	108	16	32	50	22

#### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Возникновение действительного и функционального анализа как самостоятельного раздела математики; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.
2. Счетные множества и множества мощности континуума. Множества, алгебра множеств.
3. Построение меры Лебега на прямой.
4. Общее понятие аддитивной меры; лебеговское продолжение меры.
5. Измеримые функции их свойства; определение интеграла Лебега; класс суммируемых функций.

6. Предельный переход под знаком интеграла; связь интеграла Лебега с интегралом Римана; интеграл Стильеса.
7. Теорема Радона – Никодима; прямое произведение мер и теорема Фубини.
8. Пространства  $L^1, L^p$  ( $p > 1$ ); неравенства Гель-дера и Минковского.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "Действительный анализ ДО" (<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=977>).

#### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

##### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

##### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

###### Вариант 1.

- 1) Докажите равенство  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .
- 2) Установите взаимно однозначное соответствие между множествами:  $(-\infty; 0]$  и  $(-\infty; 0] \cup \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- 3) Докажите, что при продолжении меры с кольца множеств  $R(S)$ , порожденного полукольцом  $S$ , по Лебегу (с помощью внешней меры) любое множество из самого кольца  $R(S)$  измеримо.
- 4) Найдите мощность множества всех конечных подмножеств полуинтервала  $[1; 5)$ .
- 5) Каковы строение и мера множества тех точек  $x = 0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n, \dots$  отрезка  $[0; 1]$ , у которых  $1 \leq \underline{x}_n \leq 5, n = 1, 2, \dots$ ?
- 6) Докажите, что для любого действительного  $\varepsilon \geq 0$  и любого измеримого подмножества  $A$  из  $R$  существуют замкнутое подмножество  $F$  из  $A$  и открытое множество  $G$ , содержащее  $A$ , меры которых отличаются меньше чем на  $\varepsilon$ .

##### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Контрольная работа выполнена верно или с незначительными ошибками.
не зачтено	Контрольная работа не выполнена или допущены грубые ошибки.

##### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

1. Понятие мощности множества. Теорема Кантора.
2. Счётные множества, их свойства.
3. Множества мощности континуум, их свойства.
4. Неравенства Гёльдера, Коши-Буняковского, Минковского.
5. Понятие меры. Продолжение меры по Лебегу.
6. Измеримые функции и их свойства, примеры.
7. Различные виды сходимости последовательностей измеримых функций.
8. Связь между различными видами сходимости последовательностей измеримых функций.
9. Интеграл Лебега от простых функций. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
10. Общее понятие интеграла Лебега на множестве конечной меры, его основные свойства.
11. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.
12. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
13. Функции ограниченной вариации и абсолютно-непрерывные. Пример непрерывной функции, не являющейся абсолютно-непрерывной.
14. Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
15. Пространства суммируемых функций.

## Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы верны или допущены незначительные ошибки.
не зачтено	Ответов нет или допущены грубые ошибки

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены

	обучающегося от ответа	ошибки	ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-4**

Понятие мощности множества. Теорема Кантора.
Счётные множества, их свойства.
Множества мощности континуум, их свойства.
Неравенства Гёльдера, Коши-Буняковского, Минковского.
Понятие меры. Продолжение меры по Лебегу.
Измеримые функции и их свойства, примеры.
Различные виды сходимости последовательностей измеримых функций.
Связь между различными видами сходимости последовательностей <u>измеримых</u> функций.
Интеграл Лебега от простых функций. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
Общее понятие интеграла Лебега на множестве конечной меры, его <u>основные</u> свойства.
Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.
Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
Функции ограниченной вариации и абсолютно-непрерывные. Пример <u>непрерывной</u> функции, не являющейся абсолютно-непрерывной.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А. Н., Фомин С. В. - 7-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0266-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=665740&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Действительный анализ в задачах / Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П. - Москва : Физматлит, 2005., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=634814&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=977>

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Филиппов Викторий Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.