

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальная геометрия и топология

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.14 Дифференциальная геометрия и топология относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает методы поиска, критического анализа и синтеза информации, основы системного подхода для решения поставленных задач УК-1.2: Умеет осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач УК-1.3: Владеет основами критического анализа и синтеза информации, системного подхода для решения поставленных задач	УК-1.1: Знать основные понятия, проблемы, методы и результаты дифференциальной геометрии и топологии, области их применения. УК-1.2: Уметь четко формулировать теоремы дифференциальной геометрии и топологии, решать теоретические и вычислительные задачи, обнаруживать связи со смежными темами из других разделов математики УК-1.3: Владеть навыками решения задач по курсу дифференциальной геометрии и топологии, опытом их применения	Контрольная работа	Зачёт: Задачи Экзамен: Задачи Контрольные вопросы
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и	ОПК-1.1: Знает методы решения задач из области математических и естественных наук ОПК-1.2: Умеет применять	ОПК-1.1: Знать терминологию, аппарат и методы математических доказательств,	Собеседование	Зачёт: Задачи Экзамен:

(или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3: Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности в области математических и естественных наук	используемые в дифференциальной геометрии и топологии. ОПК-1.2: Уметь доказывать теоремы, формулировать результаты решения задач, обосновывать решения, обнаружить их следствия, связи с ранее решенными задачами и возможные обобщения ОПК-1.3: Владеть навыками строгих математических доказательств при решении теоретических задач.		Задачи Контрольные вопросы
--	--	---	--	-------------------------------

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	7
Часов по учебному плану	252
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	64
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	64
- КСР	3
самостоятельная работа	85
Промежуточная аттестация	36 Экзамен, Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Всего	

			(практические занятия/лабораторные работы), часы		
	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О
Семестр 3 Тема 1 Теория гладких кривых	28	9	9	18	10
Тема 2 Теория гладких поверхностей	61	18	18	36	25
Тема 3 Метрические и топологические пространства	18	5	5	10	8
Семестр 4 Тема 1 Общая топология	70	20	20	40	30
Тема 2 Многообразия	24	8	8	16	8
Тема 3 Введение в гомотопическую топологию	12	4	4	8	4
Аттестация	36				
КСР	3			3	
Итого	252	64	64	131	85

Содержание разделов и тем дисциплины

Семестр 3.

Тема 1 Теория гладких кривых.

Длина дуги гладкой кривой, натуральная параметризация. Формулы Френе.

Тема 2 Теория гладких поверхностей.

Первая и вторая квадратичные формы гладкой поверхности. Полная (гауссова) и средняя кривизны поверхности,

Геодезические линии поверхности и их уравнения

Тема 3 Метрические и топологические пространства

Топологическое пространство, база топологии. Метрическая топология

Семестр 4.

Тема 1 Общая топология.

Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. Связность . компактность.

Фактор-топология.

Тема 2 Многообразия.

Гладкие многообразия. Дифференциал отображения многообразий

Тема 3 Введение в гомотопическую топологию.

Гомотопные отображения и гомотопическая эквивалентность. Фундаментальная группа, ее гомотопическая инвариантность

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Баландин А.В., Макаров Е.М. Элементы теории кривых. Учебно-методическое пособие.

Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022.- 26 с.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции УК-1:

1. Каков знак гауссовой кривизны поверхности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?
2. Укажите минимальную базу дискретной топологии.
3. Вычислить площадь тора, заданного вектор-функцией $\vec{r}(u, v) = \{(4 + \cos u)\cos v, (4 + \cos u)\sin v, \sin u\}$.
4. Исследовать на непрерывность отображение $f: (R, \tau|_S) \rightarrow (R, \tau_D)$, $S = \mathbb{Q}$, определенное формулой $f(x) = x$

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Контрольная решена полностью с элементами творчества
отлично	Контрольная решена полностью
очень хорошо	Контрольная решена с незначительными ошибками
хорошо	Правильно решены 80% задач
удовлетворительно	Правильно решены 60% задач
неудовлетворительно	Правильно решены 40% задач
плохо	Правильно решены менее 40% задач

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1. Покажите, что симметричная топология τ_S на R , $S = 0$, не удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа.
2. Почему отрезок $[0,1]$ и интервал $(0,1)$ рассматриваемые как подпространства прямой R с обычной топологией $\tau_{об}$, не гомеоморфны?
3. Пусть $S^0 = \{-1,1\}$ – подпространство прямой R с обычной топологией. Докажите, что топологическое пространство X несвязно тогда и только тогда, когда существует непрерывная сюръекция $f: X \rightarrow S^0$.
4. Докажите, что топология Зарисского на R не является метрической.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Даны правильные ответы на 60% заданий
не зачтено	Даны правильные ответы менее, чем на 60% заданий

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в

	ответа		Выполнены все задания, но не в полном объеме	ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Доказать, что все нормальные плоскости кривой $(a \cos t, a \sin \alpha \sin t, a \cos \alpha \sin t), a = \text{const}, \alpha = \text{const}$, проходят через прямую $(z + y \tan \alpha = 0, x = 0)$.
2. Найти уравнения касательных кривой (t^2, t, e^t) , которые параллельны плоскости $x - 2y - 5 = 0$.
3. Найти кривизну и кручение кривой $(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Найти ортогональные траектории координатных линий на поверхности $(v \cos u - k \sin u, v \sin u + k \cos u, ku)$.
2. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны геликоида $(v \cos u, v \sin u, kv)$.
3. Составить дифференциальные уравнения геодезических линий на сфере $(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin v)$.
4. Найти асимптотические линии на поверхности $(v \cos u - \sin u, v \sin u + \cos u, u)$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Правильно решены более 60% заданий
не зачтено	Даны правильные ответы менее, чем на 60% заданий

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1

Укажите минимальную базу дискретной топологии. (Ответ: семейство одноточечных подмножеств)

Сколько компонент связности имеет подпространство $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 1\}$ плоскости \mathbb{R}^2 с обычной топологией τ_{ob} ? (Ответ: две компоненты)

Компактна ли окружность $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$, рассматриваемая как подпространство плоскости \mathbb{R}^2 с обычной топологией τ_{ob} ? (Ответ: да)

Задачи для более глубокой оценки компетенции УК-1

5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Докажите, что непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово является замкнутым. Получите как следствие критерий гомеоморфности таких пространств.

Выяснить, являются ли гомеоморфными интервал $(0,1)$, полуинтервал $[0,1)$ и отрезок $[0,1]$, рассматриваемые как подпространства прямой \mathbb{R} с обычной топологией.

Докажите, что топология Зарисского на \mathbb{R} не является метрической..

Докажите, что плоскость без двух точек гомотопически эквивалентна букету двух окружностей.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все задания выполнены полностью с элементами творчества
отлично	Все задания выполнены полностью
очень хорошо	Задания выполнены, но есть незначительные погрешности
хорошо	Правильно выполнены 80% заданий
удовлетворительно	Правильно выполнены 60% заданий
неудовлетворительно	Правильно выполнены 40% заданий
плохо	Правильно выполнены менее, чем 40% заданий

5.3.5 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

Определение гладкой кривой. Касательная прямая, нормальная плоскость

Кривизна и кручение гладкой кривой

Определение гладкой поверхности. Касательные векторы и касательная плоскость.

Главные кривизны и главные направления поверхности

Полная (гауссова) и средняя кривизны поверхности, формула для вычисления гауссовой кривизны

Классификация точек поверхности по знаку гауссовой кривизны, локальное расположение поверхности относительно касательной плоскости

Топологическое пространство. Индуцированная топология.

Метрическая топология

Внутренность, граница, замыкание подмножества

Непрерывные отображения. Гомеоморфизм

Произведение топологических пространств

Связные и несвязные топологические пространства

Аксиомы отделимости

Фактор-топология

Топологические многообразия.

Гладкие многообразия. Функции перехода

Гладкие отображения многообразий

Дифференциал отображения многообразий

Гомотопные отображения и гомотопическая

эквивалентность

5.3.6 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Длина дуги гладкой кривой, натуральная параметризация

Формулы Френе.

Формулы для вычисления кривизны и кручения

Формулы для вычисления длин, углов и площадей на поверхности.

Первая квадратичная форма гладкой поверхности.

Вторая квадратичная форма поверхности.

Нормальные сечения и нормальные кривизны поверхности.

Теорема Менье.

Доказательство формулы Эйлера

Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена.

Теорема Гаусса.

Формулы для вычисления символов Кристоффеля.

Геодезические линии поверхности и их уравнения.

Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой
на поверхности

Параллельный перенос касательного вектора к поверхности
вдоль кривой.

Доказать критерий базы в топологическом пространстве и
критерий базы на множестве

Компонента связности и линейной связности

Всюду плотные и нигде не плотные подмножества

Компактные пространства и центрированные системы

Критерий компактности подмножества в
конечномерном арифметическом пространстве

Компактность произведения компактных пространств

Касательный вектор к многообразию и касательный вектор
кривой. Производная по направлению

Дифференцирование пространства функций на многообразии

Фундаментальная группа, ее гомотопическая
инвариантность

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все задания выполнены полностью с элементами творчества
отлично	Все задания выполнены полностью
очень хорошо	Задания выполнены, но есть незначительные погрешности
хорошо	Правильно выполнены 80% заданий
удовлетворительно	Правильно выполнены 60% заданий
неудовлетворительно	Правильно выполнены 40% заданий
плохо	Правильно выполнены менее, чем 40% заданий

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Мищенко Александр Сергеевич. Курс дифференциальной геометрии и топологии : [для мех.-мат. специальностей ун-тов]. - М. : Изд-во МГУ, 1980. - 439 с. : ил. - 1.30., 92 экз.
2. Задачи по геометрии. (Дифференциальная геометрия и топология). - М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. - 164 с. - 0.35., 4 экз.
3. Постников Михаил Михайлович. Лекции по геометрии. Семестр 4. Дифференциальная геометрия : [учеб. пособие для вузов по специальности "Математика"]. - М. : Наука, 1988. - 496 с. - ISBN 5-02-013741-1 (в пер.) : 1.20., 153 экз.
4. Александрян Рафаэль Арамович. Общая топология : [учеб. пособие для мат. специальностей вузов]. - М. : Высшая школа, 1979. - 336 с. : ил. - 1.20., 28 экз.

Дополнительная литература:

1. Дубровин Борис Анатольевич. Современная геометрия : методы и прил. : [учеб. пособие для физ.-мат. специальностей ун-тов]. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1986. - 759 с. : ил. - 1.90., 3 экз.
2. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 1 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1981. - 28 с. - б/ц., 16 экз.
3. Введение в топологию : [учеб. пособие для вузов по специальности "Математика"]. - М. : Высшая школа, 1980. - 295 с. : ил. - 0.75., 34 экз.
4. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ : сб. задач : [для ун-тов]. - Киев : Вища школа, 1982. - 375 с. : ил. - 0.85., 27 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Дифференциальная геометрия и топология»

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=10120>

созданные в системе электронного обучения ННГУ – <https://e-learning.unn.ru/>.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Баландин Александр Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.